

# 孤立导体表面电荷分布与 导体表面曲率的关系

张民生 周冕路

(上海师范学院) (上海教育学院分院)

关于孤立导体表面电荷分布与导体表面曲率的关系在电磁学的教科书中都有讨论。一般的处理方法是几个简单的特例或实验出发,加以推广,得出普遍的结论。即导体表面凸出处,曲率较大,电荷面密度较大;表面平坦处,曲率较小,电荷面密度也小;表面凹处,电荷面密度最小。这样的说法其实是不太清楚的。首先曲面的曲率有好几种定义,常用的有高斯曲率和平均曲率,这里所说的曲率究竟是那一种呢?其次,电荷面密度与曲率之间究竟存在着何种关系?本文就这一问题进行分析和讨论,同时通过实例计算表明,一般来说,孤立导体表面的电荷分布并不是仅由导体表面的曲率(平均曲率或高斯曲率)决定的,二者不存在简单的(诸如正比)关系,通常的说法有一定的局限性。分析表明,其原因在于曲率只是一个局部的概念,而孤立导体表面的电荷分布则是一个需进行整体考虑的问题。

## 一、面电荷分布的定量讨论

孤立导体在静电平衡时是一个等势体,导体表面处的电场强度处处与表面垂直,且与导体表面的面电荷密度成正比。因此,我们可从导体表面周围场强分布,来决定导体表面的电荷分布情况。

考虑孤立导体,设带正电。在导体表面上取小“矩形”面元  $ABCD$  (图 1), 设其面积为  $S_1$ , 而曲线  $AB$  和  $BC$  为一对正交的截线\*,  $R_1$  和  $R_2$  为这二根曲线的曲率半径。我们约定,当曲面的外法线方向与曲率中心在曲面异侧时,该曲率半径为正,反之则为负。作高斯面如图所示,其中  $A'B'C'D'$  为无限邻近  $ABCD$  的一个等势面,二者相距  $dn$ , 面元  $A'B'C'D'$  的面积为  $S_1 + dS_1$ , 根据高斯定律有(使用高斯单位制)

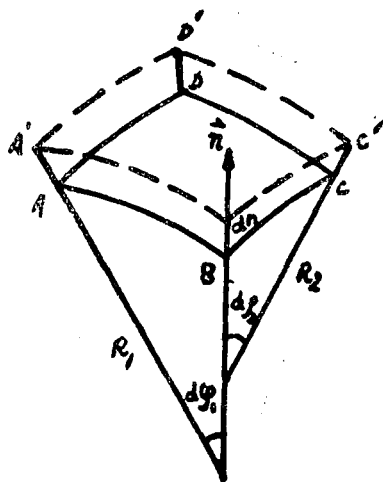


图 1

本文于 1982 年 12 月 22 日收到。

\* 所谓法截线即过曲面法线的平面与曲面相交所得的曲线。

$$\oint_x \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \int_{S_1} \sigma \cdot dS \quad (1)$$

由于场强垂直于表面及等势面, 同时考虑到  $E = 4\pi\sigma$  及面元取得很小, 则有

$$(E + dE)(S_1 + dS_1) = ES_1 \quad (2)$$

由于  $S_1 = R_1 d\varphi_1 R_2 d\varphi_2$ , 因此有

$$S_1 + dS_1 = (R_1 + dn)d\varphi_1(R_2 + dn)d\varphi_2 \quad (3)$$

略去高阶项, 由(2)可得

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

设  $k_1$  和  $k_2$  为主曲率, 应用 Enlea<sup>[1]</sup> 公式可得\*

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial n} = -(k_1 + k_2) = -2H \quad (4)$$

式中  $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$  即为平均曲率。根据法向导数的定义, 方程(4)可改写为

$$\frac{1}{E} \left[ \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial E}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial E}{\partial z} \cos \gamma \right] = -2H$$

其中  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  是导体表面外法线  $\vec{n}$  的方向余弦。上式为一阶非齐次偏微分方程, 其等价的常微分方程为<sup>[2]</sup>。

$$\frac{2H}{\cos \alpha} dx = \frac{2H}{\cos \beta} dy = \frac{2H}{\cos \gamma} dz = -\frac{dE}{E} \quad (5)$$

至此我们导出了导体表面场强  $E$  的微分方程。对于具体的曲面, 可将方程余弦和平均曲率具体表为变量  $x, y, z$  的函数, 代入(5)后解得  $E$ , 然后根据关系式  $E = 4\pi\sigma$  求得  $\sigma$ 。由总电量

$$Q = \oint \sigma dS \quad \text{即} \quad \oint EdS = 4\pi Q \quad (6)$$

可确定积分常数。

例 1, 对半径为  $R$  的导体球, 曲面方程为  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 。相应地有

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{R}, & \cos \beta &= \frac{y}{R}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{R}, & 2H &= \frac{2}{R}, \end{aligned}$$

代入(5), 有

$$\frac{2dx}{x} = \frac{2dy}{y} = \frac{2dz}{z} = -\frac{dE}{E}$$

可解得  $E = \frac{C}{R^2}$ 。由(6)可求得积分常数  $C = Q$ 。故电荷面密度为

$$\sigma = \frac{E}{4\pi} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

这个结果是熟知的。

例 2, 对导体椭球, 曲面方程为

\* 注意(4)对任一等势面均成立。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相应地有

$$\cos \alpha = \frac{x}{a^2 \left[ \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right]^{1/2}},$$

$$\cos \beta = \frac{y}{b^2 \left[ \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right]^{1/2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{c^2 \left[ \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right]^{1/2}}.$$

$$2H = \frac{\left[ \frac{1}{a^4} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) x^2 + \frac{1}{b^4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) y^2 + \frac{1}{c^4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) z^2 \right]}{\left[ \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right]^{3/2}}$$

代入(5)后可解得

$$E = C \cdot \left[ \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right]^{-1/2} \quad (C \text{ 为积分常数})$$

若椭球带电量  $Q$ , 可求得

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc} \left[ \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right]^{-1/2}$$

上述结果与用其它方法求得的结果完全一致<sup>[3]</sup>。

## 二、几点讨论

1. 根据上面求得的结果, 考察椭球上的二点  $M(0, b, 0)$  和

$$N \left( \frac{a^2}{b} \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \quad 0, \quad c^2 \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \right).$$

计算过二点的平均曲率和电荷面密度有

$$M: H_M = \frac{b}{2} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right], \quad \sigma_M = \frac{Q}{4\pi ac}$$

$$N: H_N = \frac{b^3}{2} \left[ \frac{1}{b^4} + \frac{1}{a^2 c^2} \right], \quad \sigma_N = \frac{Q}{4\pi ac}$$

这一结果表明, 在这二个平均曲率不相等的点处, 有相同的电荷面密度。这说明曲率面密度不是仅由平均曲率决定的。虽然在微分方程(5)中出现的是平均曲率, 但这反映的仅是局部性质。

2. 在微分几何中, 反映曲面弯曲性质的曲率除平均曲率外还有高斯曲率。那么孤立导体的电荷面密度是否由高斯曲率决定呢? 我们也可举出一些反例说明这也不成立。

反例1, 如图(2)所示, 设导体在  $p$  和  $Q$  处曲面形状完全相同, 在这二点, 虽然一处凸, 一处凹, 但它们的高斯曲率却是完全相同的<sup>[1]</sup>。这二点的电荷面密度肯定不同,  $p$  点

大,  $Q$  点小。

反例 2, 荷电  $Q$  的金属圆盘 (半径为  $a$ ), 其电荷面密度依据 [3] 为

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-1/2}$$



图 2

式中  $r$  为盘面的极坐标, 原点取在盘心。由 (1) 可知, 盘面 (除去边缘) 上高斯曲率处处相等且为零, 而由上式可知  $\sigma$  随  $r$  的增大而增大。此外我们还可举出不少类似的例子足以说明高斯曲率相同之处, 电荷面密度却不同。

3. 在 [4] 中把方程 (4) 改写为

$$-\frac{dE}{E} = \frac{2}{r} dn \quad (7)$$

其中  $r = \frac{1}{H}$  为平均曲率半径。然后进行积分, 得  $E = E_0 \exp(-2n/r)$ , 其中  $E_0$  为导体表面处的场强, 而导体的电势  $\phi = \int_0^\infty E dn = \frac{r}{2} E_0$ 。由于导体上各点的电势都相同, 故可得  $E_0$  与  $r$  成反比。由于  $E_0 = 4\pi\sigma$ , 因此在 [4] 中得到了电荷面密度与平均曲率成正比的结论。其实这样的处理是有问题的, 下面对此进行分析。

对方程 (7) 进行积分, 实际上是沿各等势面的法向  $\vec{n}$  进行的。但是一般来说在  $\vec{n}$  上各等势面的平均曲率是各不相同的。即  $H = H(n)$ , 或  $r = r(n)$ 。我们可把  $H$  或  $r$  展开为级数

$$H = H_0 + \left(\frac{dH}{dn}\right)_0 n + \dots$$

或 
$$r = r_0 + \left(\frac{dr}{dn}\right)_0 n + \dots \quad (8)$$

在 [4] 的处理方法中, 实质上只是取了 (8) 式的零级近似, 也就是假定了在导体表面附近的各等势面沿  $\vec{n}$  方向有相同的平均曲率, 显然这是很特殊的。

若取  $H$  的一级近似, 可求得

$$E = E_0 \exp[-(2H_0 n + H'_0 n^2)] \quad \left[H'_0 = \left(\frac{dH}{dn}\right)_0\right]$$

$$\phi = \int_0^\infty \vec{E} \cdot d\vec{n} = E_0 \left[ \frac{1}{2H_0} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{H'_0}} \right]$$

上式表明, 在一级近似下, 导体表面的场强  $E_0$  (以及电荷面密度) 与导体表面的平均曲率  $H_0$  (取  $n=0$  即为导体表面) 之间的关系就比较复杂了。

从上述分析还可知, 单由导体表面的平均曲率, 在一般情况下是无法确定导体表面处的场强 (以及面电荷密度) 的。我们知道, 导体荷电时, 电荷只能分布在表面, 在稳定的情况下每一电荷元所受到的其它所有电荷对它的作用力的合力必须指向外法线方向。在这中间邻近电荷的作用肯定是起着主要作用的, 为确定这一作用力特别是作用力的方向, 导体表面在该点邻域内的形状, 亦即曲率是至关重要的。这就定性地说明了曲率在决定面电荷分布时所起的作用, 但是从上面的分析还可以看到, 邻域以外的电荷虽因距离增大, 作用较弱, 但这一作用毕竟还是存在的, 因此要完全确定面电荷分布, 必须进行整体的考虑。

4. 应用 (4) 和 (8) 可讨论凸类点和凹类点处的电荷面密度, 这在 [3, 5, 6] 中已有讨论

这里就不重复了。其结论是凸尖点处  $\sigma \rightarrow \infty$ ，凹尖点处  $\sigma \rightarrow 0$ 。为验证这一结论，我们测定了荷电心形导体（图 3）的凸尖点 A 和凹尖点 B 沿法向  $\vec{n}$  的电势分布，实验测得的数据如下表所示（取导体上电势为零）

法向 $n$ (cm)	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
电势 $\phi$	A	2.4	2.9	3.4	4.0	4.4	4.8	6.3	7.4	8.4	9.2
	B		0.1	0.4	1.0	1.7	2.3	4.6	6.1	7.3	8.2

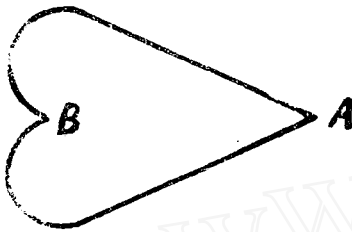


图 3

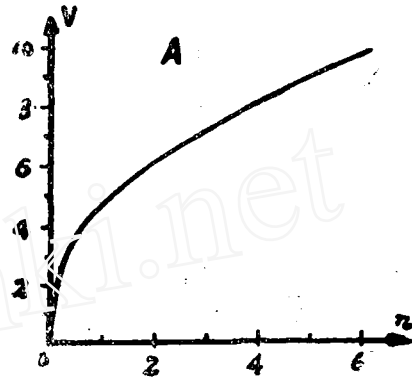


图 4

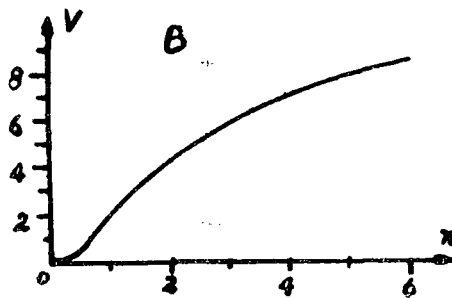


图 5

根据实验数据分别作  $\phi-n$  图线如图 (4), (5) 所示。由于  $E = -\partial\phi/\partial n$ 。因此由图线在  $n=0$  处的斜率即可知 A 和 B 点的场强的大小。由图 (4), (5) 显然可见： $E_A \sim \infty$ ,  $E_B \sim 0$ 。因此有  $\sigma_A \sim \infty$ ,  $\sigma_B \sim 0$ 。这就验证了上述结论。

（作者曾得到上海师范学院阚仲元副教授，张梦心先生和华东师大物理系钱振华先生的帮助，在此谨致谢意。）

### 参 考 文 献

- [1] 苏步青等“微分几何”人民教育出版社
- [2] 复旦大学数学系“常微分方程”上海科学技术出版社
- [3] 朗道等“连续媒质电动力学”人民教育出版社
- [4] 克鲁格“电工原理”东北教育出版社

- [5] 王国权 “孤立带电导体电荷密度的分布” 物理通报 1966 年 3 期  
[6] 杰克逊 “经典电动力学” 人民教育出版社

## On the Relationship Between the Electric Charge Distribution on the Surface of an Isolated Conductor and the Curvatures of Its Surface

*Zhang Mingsheng*

(Shanghai Teachers College)

*Zhou Binglu*

(Shanghai Education College (Branch))

### Abstract

In this paper we reveal the relationship between the equilibrium charge distribution on the surface of an isolated conductor and the curvatures of its surface. A relevant equation is derived and the deficiencies of the elementary exposition are also discussed.