关于圈和树的PLD

施　永　兵*

摘　　要

本文根据和在 R. J. Fandree 和 R. H. Schelp 在 1976 年召开的《关于图的理论和应用》的国际图论会上发表的论文《Various length paths in graphs》中提出的两个问题进行了探讨,得到了两类由PLD确定的连通图,得出了树的PLD的若干充要条件。这些充要条件提供了树的PLD的计算公式,应用起来十分方便;对所给序列中非零项较少且n不太大时,判别它是否是某棵树的PLD是十分有效的。本文对任意多个非零项及任意大的序列是否是某棵树的PLD也得到了一个应用方便的必要条件。

本文讨论有限、无向简单图(即无环和重边的图)。用 $G=G(V,E)$ 表示一个图,其中 V 是顶点集,E 是边集。如果 V 中两个顶点 u 和 v 在 G 中存在含有 i 个顶点的一条路,则称性质 $P_i(u,v)$ 成立。如果 V 中任意两个不相同的顶点之间存在一条长为 i 的路,则称 G 有 P_i 性质。令 $S_i(2\leqslant i\leqslant n)$ 是所有 G 中有性质 $P_i(u,v)$ 的不相同的无序顶点对的集合,令 S_1 是所有没有任何路连接的无序顶点对的集合。

一个阶为 n 边数为 m 的图 G 的路长分布(简称 PLD)是序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,其中 $x_i=|S_i|$。显然,$x_1=0$ 当且仅当 G 是连通的,$x_2=m$,对所有 i,$x_i\leqslant n(n-1)/2$。

PLD 的概念首先是在 1970 年由 *M.F.* Capobianco 在[1]中引进。后来由 R. J. Faudree, C. C. Rousseau 和 R. H. Schelp 在[2]中进行了研究,並证明了若干结果。于 1976 年 Faudree 和 Schelp 在《关于图的理论和应用》的国际图论讨论会上发表了论文[3],文中综述了关于图的 PLD 问题及 P_i 性质等主要结果,並提出了若干未解决的问题,其中的两个问题是①寻找所有由它们的 PLD 确定的连通图,②哪些序列 $(0,x_2, x_3, \cdots, x_n)$ 是阶为 n 的一棵树的 PLD? 本文对这两个问题进行了探讨,得到了若干结果。

一　几类由 PLD 确定的连通图

一般地说,一个图的 PLD 不能确定这个图。例如,Faudree　Schelp 在[3]中已经指出:对所有 $n\geqslant 9$,阶为 n 直径为 4 的具有同样的 PLD 的不同构的树是存在的。然而,他们也指出了某些图是由它们的 *PLD* 确定的。这些图是:K_n, K_n-e, W_n(轮),任意一条路,$n\leqslant 5$ 的任意一个图,$n\leqslant 8$ 的任意一棵树。

我们通过对一些图的 PLD 的研究,又发现下面两类图是由它们的 PLD 确定的。

定理 1、圈 $C_n(n\geqslant 3)$ 是由它的 PLD 确定的。

证明:设 C_n 是 n 个顶点的一个圈,它的 PLD 为 $(0, x_2, x_3, \cdots, x_n)$,容易知道 $x_i(i=2,3,$

本文于 1981 年 10 月 29 日收到。

* 现在崇明中学任教,本文是他在师院数学系学习期间所写。

…, n)满足下列条件：

(i) 若 n 为奇数，则

$$x_i = n, \ i = 2, 3, \ \cdots\cdots, \ n$$

(ii) 若 n 为偶数，则

$$x_i = \begin{cases} n, & i = 2, \ 3, \cdots\cdots, \frac{n}{2}, \ \frac{n}{2}+2, \cdots\cdots, \ n \\ \frac{n}{2}, & i = \frac{n}{2}+1 \end{cases}$$

设 G 是任意一个和 C_n 具有同样的 PLD 的 n 个顶点的图。以下只要证 $G = C_n$。因为 $x_1 = 0$，所以 G 是连通的，又因为 $x_2 = n$，所以 G 含有唯一的圈 C。若 $G \neq C$，则 $G - C$ 是森林，因而 G 含有 1 度点 u，于是 G 中 n 路必定是以 u 为起点（或终点），这样 G 中至多有 $n-1$ 对不相同的顶点 u 和 v 有 n 路，与 $x_n = n$ 矛盾，所以 $G = C = C_n$ ■

我们定义 $Ps*Cr$ 是 s 个顶点的路和 r 个顶点的圈重合一个顶点（其中路的顶点是一个端点）的 $s+r-1$ 个顶点的图（其中 $s \geqslant 2$，$r \geqslant 3$）。

定理 2、$Ps*Cr$ 是由它的 PLD 确定的。

证明：设 $G_0 = Ps_0*Cr_0$ 的顶点数 $n = s_0 + r_0 - 1$，它的 PLD 为 $(0, x_2, x_3, x_3, \cdots, x_n)$，则 $x_2 = s_0 + r_0 - 1 = n$，$x_n = 2$。设 G 是任意一个和 G_0 具有同样的 PLD 的 n 个顶点的图。以下只要证 $G = G_0$。由于 $x_1 = 0$，$x_n = n$，可知 G 是含有唯一圈的连通图，又因为 $x_n = 2$，推知 G 只含一个 1 度点，所以 $G \in \mathbf{y} = \{Ps*Cr | s+r-1 = n, \ s \geqslant 2, \ r \geqslant 3\}$。以下只要证 $\mathbf{y}$ 中各个图的 PLD 各不相同即可。为此，我们把 $\mathbf{y}$ 分为两部分即 $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$，其中

$$\mathbf{y}_1 = \{Ps*Cr | \ s+r-1 = n, \ s \geqslant 2, \ r \geqslant 3, \ r \text{ 是奇数}\},$$
$$\mathbf{y}_2 = \{Ps*Cr | \ s+r-1 = n, \ s \geqslant 2, \ r \geqslant 3, \ r \text{ 是偶数}\}。$$

首先计算 lg$_1$ 中任意一个图的 PLD 中 $\sum_{i=2}^{n} x_i$。的值。因为在 $Ps*Cr$(r 为奇数)中，所有不相同的两个顶点之间的路的总数等于 $\sum_{i=2}^{n} x_i$。考察图 1 中经过 $e = uv$ 的路和不经过 e 的路的条数，就立即得到

$$f_1(r) = \sum_{i=2}^{n} x_i = n(n-1)/2 + (r-1)(n+1-r) + (r-1)(r-2)/2$$

$$f_1'(r) = n - r + \frac{1}{2} > 0$$

即 $f_1(r)$ 的值随 r 的值增加而严格上升，所以在 $\mathbf{y}_1$ 中各个图的 PLD 各不相同。

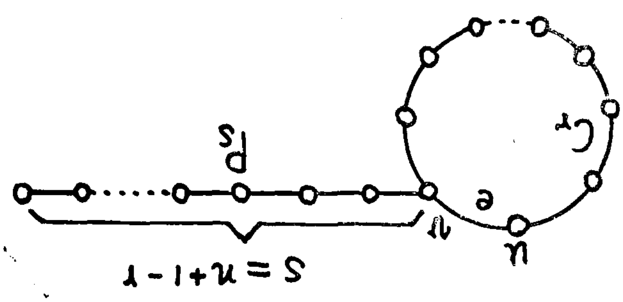

图 1

其次计算 $\mathbf{y}_2$ 中任意一个图的 PLD 中 $\sum_{i=2}^{n} x_i$ 的值，得到

$$f_2(r)=\sum_{i=2}^{n} x_i=n(n-1)/2+(r-1)(n+1-r)+(r-1)(r-2)/2-(s+r/2-1)$$

$$=n(n-1)/2+(r-2)(n+1-r)+(r-2)^2/2$$

$$f_2'(r)=n+1-r>0$$

所以 $\mathbf{y}_2$ 中各个图的 PLD 各不相同。

最后计算 $\mathbf{y}_1$ 中任意一个图的 PLD 中 $x_i(i=2,3,\cdots,n)$ 的值，得到下列二种情况：

(i) 若 $2\leqslant s\leqslant r-1$，则

$$x_i=\begin{cases}s+r+i-3, & i=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ s+1\\ 2s+r-2, & i=s+2,\cdots\cdots,\ r\\ 2(s+r-i), & i=r+1,\ \cdots\cdots,\ r+s-1\end{cases}$$

(ii) 若 $3\leqslant r\leqslant s$，则

$$x_i=\begin{cases}s+r+i-3, & i=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ r\\ s+2r-i-1, & i=r+1,\ \cdots\cdots,\ s\\ 2(s+r-i), & i=s+1,\ \cdots\cdots,\ s+r-1\end{cases}$$

易见，在每种情况下，对任意 $i\in\{3,\ 4,\ \cdots\cdots,\ n-1\}$，$x_{i-1}$，$x_i$，$x_{i+1}$ 适合下列三个关系式之一：

① $x_{i-1}<x_i\leqslant x_{i+1}$

② $x_{i-1}\geqslant x_i>x_{i+1}$

③ $x_i>x_{i-1}$ 和 $x_i>x_{i+1}$

又容易计算 $\mathbf{y}_2$ 中任意一个图的 PLD 中 $x_i(i=\frac{r}{2},\ \frac{r}{2}+1,\ \frac{r}{2}+2)$ 的值，知道满足下列关系式：

$$x_{\frac{r}{2}+1}<x_{\frac{r}{2}} \text{ 和 } x_{\frac{r}{2}+1}<x_{\frac{r}{2}+2}$$

由此可见，$\mathbf{y}_1$ 中各个图的 PLD 不可能和 $\mathbf{y}_2$ 中某个图的 PLD 相同　■

二、树的 PLD

为了解决哪些序列 $\langle 0,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_n\rangle$ 才是阶为 n 的一棵树的 PLD 问题，我们需要引入下面的概念。

一个非负整数 a 划分为 p 个正整数之和，即 $a=\sum_{i=1}^{p} y_i$，称为非负整数 a 的一个划分。显然若 $a=0$，则 $p=0$；若 $a\neq 0$，则 p 适合 $1\leqslant p\leqslant a$。

一个正整数 n，如果 $n-1\neq 0$，则把 $n-1$ 划分为 p_1 个正整数之和，即 $n-1=\sum_{i_2=1}^{p_1} y_{i_2}$；若 $y_{i_2}-1(i_2=1,\ 2,\ \cdots,\ p_1)$ 不全为 0，则对每个不为 0 的 $y_{i_2}-1$ 划分为 p_{1i_2} 个正整数之和，即 $y_{i_2}-1=\sum_{i_3=1}^{p_{1i_2}} y_{i_2i_3}$；若 $y_{i_2i_3}-1\ (i_2=1,\ 2,\ \cdots,\ p_1;\ i_3=1,\ 2,\ \cdots p_{1i_2})$ 不全为 0，则继续重复上述过程 k 次，直至 $y_{i_2i_3\cdots\cdots i_{k+1}}-1(i_2=1,\ 2,\ \cdots,\ p_1;\ i_3=1,\ 2,\ \cdots,\ p_{1i_2};\ \cdots\cdots;\ i_{k+1}=1,\ 2,\ \cdots,\ p_{1i_2\cdots i_k})$ 全为 0 为止。我们称这一过程为 n 的 k 重减壹划分。

例 1，$n=10$ 的一个 $k=3$ 重减壹划分见表 1。

表 1. n=10的一个k=3重减壹划分

第一重减壹划分	$n=10$	$10-1=2+3+4$	$p_1=3$
第二重减壹划分	$y_1=2$	$2-1=1$	$p_{11}=1$
	$y_2=3$	$3-1=1+1$	$p_{12}=2$
	$y_3=4$	$4-1=2+1$	$p_{13}=2$
第三重减壹划分	$y_{31}=2$	$2-1=1$	$p_{131}=1$

为了今后叙述的方便,我们引进记号:

$$b_l=\sum_{i_2=1}^{p_1}\sum_{i_3=1}^{p_{1i_2}}\cdots\cdots\sum_{i_l=1}^{p_{1i_2\cdots i_{l-1}}}p_{1i_2\cdots i_l} \tag{1}$$

$$f_l^{jt}=\sum_{i_2=1}^{p_1}\sum_{i_3=1}^{p_{1i_2}}\cdots\cdots\sum_{i_{l-t}=1}^{p_{1i_2\cdots i_{l-t-1}}}\left(\sum_{i_{l-t+1}=1}^{p_{1i_2\cdots i_{l-t}}}\cdots\cdots\sum_{i_{l-t+j}=1}^{p_{1i_2\cdots i_{l-t+j-1}}}p_{1i_2\cdots i_{l-t+j}}\right)$$
$$\times\left(\sum_{i_{l-t+1}=1}^{p_{1i_2\cdots i_{l-t}}}\cdots\cdots\sum_{i_l=1}^{p_{1i_2\cdots i_{l-1}}}p_{1i_2\cdots i_l}\right)$$

注意(1)和(2)式中 $i_1\equiv1$, $p_{1i_2\cdots i_l}\equiv p_{i_1i_2\cdots i_l}$, 而且规定当 $s>l$ 时, $\sum\limits_{i_s=1}^{p_{1i_2\cdots i_{s-1}}}\cdots\cdots\sum\limits_{i_l=1}^{p_{1i_2\cdots i_{l-1}}}F(p_{1i_2\cdots i_l})=F(p_{1i_2\cdots i_l})$。其中 $F(p_{1i_2\cdots i_l})$ 是关于 $p_{1i_2\cdots i_l}$ 的多项式。

由 n 的 k 重减壹划分的定义,易知,当 $1\leqslant l\leqslant k$ 时, $b_l\neq0$, 当 $0\leqslant j\leqslant t<l\leqslant k$ 时, $f_l^{jt}\neq0$。否则,定义 b_l 和 f_l^{jt} 均为零。

我们还引进记号:

$$\left.\begin{aligned}a_{r2}&=\sum_{l=2r-2}^{k}f_l^{0,2r-3}b_{2r-2}\\a_{rj}&=\sum_{l=2r-j}^{k}\left(f_l^{j-2,2r-(j+1)}-f_l^{j-3,2r-(j+2)}\right),3\leqslant j\leqslant r\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}a^*_{r1}&=\sum_{l=2r-1}^{k}f_l^{0,2r-2}-b_{2r-1}\\a^*_{rj}&=\sum_{l=2r-j}^{k}\left(f_l^{j-1,2r-(j+1)}-f_l^{j-2,2r-(j+2)}\right),2\leqslant j\leqslant r-1\\a^*_{rr}&=\frac{1}{2}\sum_{l=r}^{k}\left(f_l^{r-1,r-1}-f_l^{r-2,r-2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

注意在(3)和(4)式中 $2\leqslant r\leqslant k$。

在例 1 中, $b_1=3$, $b_2=5$, $b_3=1$, $f_1^{00}=9$, $f_2^{00}=9$, $f_3^{00}=1$, $f_2^{01}=15$, $f_3^{01}=2$, $f_3^{02}=3$,

$f_2^{11}=25$，$f_3^{11}=1$，$f_3^{12}=5$，$f_3^{22}=1$，$a_{22}=12$，$a^*_{21}=2$，$a^*_{22}=8$，$a_{32}=0$，$a_{33}=3$，$a^*_{31}=0$，$a^*_{32}=0$，$a^*_{33}=0$。

定理3、非负整数序列$(0, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n)$是$n$个顶点的某棵树的PLD充分必要条件是存在$n$的一个$k$重减壹划分,使得下列等式成立:

$$x_2=n-1,$$

$$x_3=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k} f_l^{00}-b_l+\frac{1}{2}(n-1),$$

$$x_i=\begin{cases}\sum\limits_{j=2}^{r} a_{rj}, & \text{对 } i=2r,\ r\in\{2,3,\cdots\cdots,k\}\\ \sum\limits_{j=1}^{r} a^*_{rj}, & \text{对 } i=2r+1,\ r\in\{2,3,\cdots\cdots,k\}\\ 0, & i\in\{2k+2, 2k+3, \cdots\cdots, n\}\end{cases}$$

我们称这些等式为条件(L)。

证明:先证必要性。设非负整数序列$(0, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n)$是树$T$的PLD。对任意$v\in V(T)$,用$d(v)$表示顶点$v$在$T$中的度数。设树$T$的直径为$2k-1$或$2k$,取一个中心$u_1$为树$T$的根,並对$V(T)-u_1$中所有顶点按与$u_1$的距离进行如此标号,先对距离为1的$d(u_1)$个顶点标上$u_{1i_2}(i_2=1, 2, \cdots\cdots d(u_1))$,然后对距离为2的$\sum\limits_{i_2=1}^{d(u_1)}[d(u_{1i_2})-1]$个顶点标号,使与$u_{1i_2}$相邻的顶点标上$u_{1i_2i_3}(i_2=1, 2, \cdots\cdots, d(u_1);\ i_3=1, 2, \cdots\cdots, d(u_{1i_2})-1)$,……继续重复这一过程,直至距离为$k-1$的顶点标上$u_{1i_2\cdots i_k}(i_2=1, 2, \cdots\cdots, d(u_1);\ i_3=1, 2, \cdots\cdots, d(u_{1i_2})-1, \cdots\cdots;\ i_k=1, 2, \cdots\cdots, d(u_{1i_2}\cdots i_{k-1})-1)$为止。令$d(u_1)=p_1$,$d(u_{1i_2})-1=p_{1i_2}$,$d(u_{1i_2i_3})-1=p_{1i_2i_3}$,……,$d(u_{1i_2}\cdots_{i_k})-1=p_{1i_2}\cdots_{i_k}$,于是得到树$T$的顶点数$n$的一个$k$重减壹划分。以下我们用归纳法证明树$T$的PLD适合条件$(L)$。当$k=0$时,$T$为1个顶点的树;当$k=1$时,$T$为$K_2$或为星的树,在这些情况下,容易看出树$T$的PLD适合条件$(L)$。当$k=2$时,通过计算树$T$的PLD,得到

$$x_2=n-1,$$

$$x_3=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\sum_{i_2=1}^{p_1} p_{1i_2}^2\right)-p_1+\frac{1}{2}(n-1)$$

$$x_4=(p_1-1)\sum_{i_2=1}^{p_1} p_{1i_2}$$

$$x_5=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i_2=1}^{p_1} p_{1i_2}\right)^2-\sum_{i_2=1}^{p_1} p_{1i_2}^2\right]$$

$$x_i=0, \quad i=6,7, \cdots\cdots, n$$

显然这就是条件(L)在$k=2$时的情形。归纳假设树T的PLD,对$k<N$时,适合条件(L)。看$k=N$时的情况。为了计算树T的PLD,我们先考虑$T-u_1$中以$u_{1i_2}(i_2=1, 2, \cdots\cdots, p_1)$为根的树$T^{(i_2)}$的PLD。设树$T^{(i_2)}$的顶点数为$p_{i_2}$。因为从树$T$可以得到它的顶点数为$n$的一个$N$重减壹划分,所以从树$T^{(i_2)}$可以得到$T^{(i_2)}$的顶点数$y_{i_2}$的一个$N_{i_2}\leqslant N-1$重减壹划分,根据归纳假设$T^{(i_2)}$的PLD序列$(0, x_2^{(i_2)}, x_3^{(i_2)}, \cdots\cdots, x_{y_{i_2}}^{(i_2)})$适合条件:

$$x_2^{(i_2)}=y_{i_2}-1,$$

$$x_3^{(i_2)}=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N_{i_2}}f_l^{(i_2)00}-b_1^{(i_2)}+\frac{1}{2}(y_{i_2}-1),$$

$$x_i^{(i_2)}=\begin{cases}\sum_{j=2}^{r}a_{ij}^{(i_2)}, & 对\ i=2r,\ r\in\{2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N_{i_2}\}\\ \sum_{j=1}^{r}a^{*(i_2)}_{rj}, & 对\ i=2r+1,\ r\in\{2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N_{i_2}\}\\ 0, & i\in\{2N_{i_2}+2,\ 2N_{i_2}+3,\ \cdots\cdots,\ y_{i_2}\}。\end{cases}$$

为了下面设算的方便，我们不妨改(*)序列为项数为 n 的序列 $(0,x_2^{(i_2)},\ \cdots\cdots,\ x_{2(N-1)+1}^{(i_2)},0,0,\ \cdots\cdots,\ 0)$，其中 $x_i^{(i_2)}(i=2,3,\ \cdots\cdots,2N_{i_2}+1)$ 与(*)序列中对应项相同，而 $x_i^{(i_2)}=0,\ i=2N_{i_2}+2,\ 2N_{i_2}+3,\ \cdots\cdots,\ 2(N-1)+1$。于是在树 T 中：

$$x_2=n-1,$$

$$x_3=\sum_{i_2=1}^{p_1}x_3^{(i_2)}+\sum_{i_2=1}^{p_1}p_{1i_2}+\frac{1}{2}p_1(p_1-1)$$

$$=\sum_{i_2=1}^{p_1}\left[\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N-1}f_l^{(i_2)00}-b_1^{(i_2)}+\frac{1}{2}(y_{i_2}-1)\right]+\sum_{i_2=1}^{p_1}p_{1i_2}+\frac{1}{2}p_1(p_1-1)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l=2}^{N}f_l^{00}-b_2+\frac{1}{2}(n-1)+b_2+f_1^{00}-b_1$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{N}f_l^{00}-b_1+\frac{1}{2}(n-1)$$

对 $i=2r,\ r\in\{2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N-1\}$

$$x_{2r}=\sum_{i_2=1}^{p_1}=1x_{2r}^{(i_2)}+\triangle_{2r}$$

其中 $\triangle_{2r}=b_{2r-1}+(f_{2r-2}^{2;2r-3}-b_{2r-2})+(f_{2r-3}^{1;2r-4}-f_{2r-3}^{0,2r-5})+f_{2r-4}^{2,2r-5}-f_{2r-4}^{1,2r-6})+\cdots\cdots$
$+(f_r^{r-2,r-1}-f_r^{r-3,r-2})$

$$x_{2r}=\sum_{i_2=1}^{p_1}\sum_{j=2}^{r}a_{rj}^{(i_2)}+\triangle_{2r}$$

$$=\sum_{i_2=1}^{p_1}\Big[\sum_{l=2r-2}^{N-1}f_l^{(i_2)0,2r-3}-b_{2r-2}^{(i_2)}+\sum_{l=2r-3}^{N-1}(f_l^{(i_2)1,2r-4}-f_l^{(i_2)0,2r-5})$$

$$+\sum_{l=2r-4}^{N-1}f_l^{(i_2)2,2r-5}-f_l^{(i_2)1,2r-6})+\cdots\cdots+\sum_{l=r}^{N-1}(f_l^{(i_2)r-2,r-1}-f_l^{(i_2)r-3,r-2})\Big]+\triangle_{2r}$$

$$=\sum_{l=2r-1}^{N}f_l^{0,2r-3}-b_{2r-1}+\sum_{l=2r-2}^{N}(f_l^{1,2r-4}-f_l^{0,2r-5})$$

$$+\sum_{l=2r-3}^{N}(f_l^{2,2r-5}-f_l^{1,2r-6})+\cdots\cdots+\sum_{l=r+1}^{N}(f_l^{r-2,r-1}-f_l^{r-3,r-2})+\triangle_{2r}$$

$$=\sum_{j=2}^{r}a_{rj}$$

对 $i=2r+1,\ r\in\{2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N-1\}$，同理可得

$$x_{2r+1}=\sum_{j=1}^{r}a^{*}{}_{rj}$$

由于 $j<N$ 时，$a_{Nj}=a^{*}{}_{Nj}=0$，所以

$$x_{2N}=f_N^{N-2,N-1}-f_N^{N-3,N-2}=\sum_{j=1}^{N}a_{Nj}$$

$$x_{2N+1}=\frac{1}{2}(f_N^{N-1,N-1}-f_N^{N-2,N-2})=\sum_{j=1}^{N}a^{*}{}_{Nj}$$

对 $i\in\{2N+2,\ 2N+3,\ \cdots\cdots,\ n\}$，显然有

$$x_i=0$$

所以，树 T 的PLD适合条件 (L)。根据归纳原理，对于任意整数 k，树 T 的PLD适合条件 (L)，从而必要性得证。

再证充分性。设 n 的一个 k 重减壹划分及非负整数序列 $(0,\ x_2,x_3,\cdots\cdots,\ x_n)$ 满足条件 (L)。以下我们对 k 用归纳证明所给序列是某棵树的PLD。当 $k=0$ 时，$n-1=0$，即 $n=1$，显然序列(0)是一个顶点的树的PLD。当 $k=1$ 时，按条件 (L) 计算得

$$x_2=n-1$$

$$x_3=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$x_i=0,\ i=4,\ 5,\ \cdots\cdots,\ n$$

显然，若 $n=2$，则序列 $(0,1)$ 是2个顶点的称为 K_2 的一棵树的PLD；若 $n>2$，则序列 $(0,\ n-1,\ \frac{1}{2}(n-1)(n-2),0,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)$ 是 n 个顶点的称为星的一棵树的PLD。当 $k=2$ 时，按条件计算得

$$x_2=n-1$$

$$x_3=\frac{1}{2}\left(p_1^2+\sum_{i_2=1}^{p_1}p_{1i_2}^2\right)-p_1+\frac{1}{2}(n-1)$$

$$x_4=(p_1-1)\sum_{i_2=1}^{p_1}p_{1i_2}$$

$$x_5=\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i_2=1}^{p_1}p_{1i_2}\right)^2-\sum_{i_2=1}^{p_1}p_{1i_2}^2\right]$$

$$x_i=0,\ i=6,\ 7,\ \cdots\cdots,\ n$$

现在我们构作一棵树 T_2，先固定一个顶点 u_1，从 u_1 出发引出 p_1 条边，这些边的另一个端点记为 $u_{1i_2}\ (i_2=1,2,\cdots\cdots,\ p_1)$，然后从每一个 u_{1i_2} 上再引出 p_{1i_2} 条边(若 $p_{1i_2}=0$，则 u_{1i_2} 上不再引出边)。由必要性的证明过程，知满足上面条件的序列 $(0,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ 0,\ 0\cdots\cdots,\ 0)$ 是树 T_2 的PLD。归纳假设对 $k<N$ 时，所给序列满足条件 (L)。看 $k=N$ 时的情况。因为 $n-1=\sum\limits_{i_2=1}^{p_1}y_{i_2}$，而且对 n 是 N 重减壹划分，所以对每个 y_{i_2} 至多是 $N-1$ 重减壹划分，而根据归纳假设，对应于每个 y_{i_2} 都有一棵 y_{i_2} 个顶点的以 u_{1i_2} 为根的树 $T^{(i_2)}$，它的PLD满足条件 (L)。现在我们构作树 T_N，先固定一个顶点 u_1，从 u_1 出发引出 p_1 条边，这些边的另一个端点记为 $u_{1i_2}(i_2=1,2,\ \cdots\cdots,\ p_1)$，并以 u_{1i_2} 为根作树 $T^{(i_2)}$。仿照必要性中 $k=N$ 时的证

法，知道当 $k=N$ 时，适合条件 (L) 的所给序列是树 T_N 的 PLD。根据归纳原理，充分性得证 ■

对于例1中给出的 $n=10$ 的一个 $k=3$ 重减壹划分，应用定理3所给的条件 (L) 计算得 $x_2=9$，$x_3=11$，$x_4=12$，$x_5=10$，$x_6=3$，$x_7=x_8=x_9=x_{10}=0$，所以序列(0,9,11,12,10,3,0,0,0,0,)是10个顶点的一棵树的PLD。这棵树画在图2中。

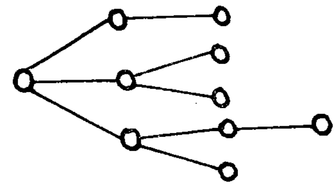

图 2

容易看出应用定理3计算给定树的PLD是十分方便的，但是对于所给序列 $(0, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，要判别它是否是某棵树的PLD还是十分明显。因此，我们须对定理3中的条件作适当处理。作为定理3的直接推论，我们给出 $k=2$（即所给序列中 x_4 或 $x_5\neq 0$，而当 $i>5$ 时，$x_i=0$）和 $k=3$（即所给序列中 x_6 或 $x_7\neq 0$，而当 $i>7$ 时，$x_i=0$）时判别序列是否是某棵树的PLD的充要条件。

推论 3.1 非负整数序列 $(0, x_2, x_3, x_4, x_5, 0, 0, \cdots\cdots, 0)$（其中 x_4 或 $x_5\neq 0$）是 n 个顶点的某棵树的PLD的充要条件是

(i) $x_2=n-1$,

(ii) $\sum\limits_{i=2}^{5} x_i = n(n-1)/2$,

(iii) $y^2-(n-2)y+x_4=0$ 有两个正整数解 a 和 b,

(iv) 下列①或②成立：

① $z=b^2-2x_5$ 是正整数，且存在非负整数列 $\{a_i \mid i=1,2,\cdots\cdots, a+1\}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{a+1} a_i=b$，$\sum\limits_{i=1}^{a+1} a_i^2=z$,

② 在①中交换 a 与 b ■

推论 3.2 非负整数序列 $(0, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, 0, 0, \cdots\cdots, 0)$（其中 x_6 或 $x_7\neq 0$）是 n 个顶点的某棵树的PLD的充要条件是

(i) $x_2=n-1$,

(ii) $\sum\limits_{i=2}^{7} x_i = n(n-1)/2$,

(iii) $y^2-(n-2)y+(x_4+x_6)=0$ 有两个正整数解 a 和 b,

(iv) 下列①或②成立：

① 可以选到 $p(2\leqslant p\leqslant a-1)$ 使适合下列式子的 l_1、l_2、l_3、l_4 都是正整数：

$$\begin{cases} l_1=a+1-p \\ l_2=l_1+x_4-pb \\ l_3=l_1^2-2x_7 \\ l_4=2x_3-p^2+2p-n+1 \end{cases}$$

同时存在非负整数列 $\{a_i \mid i=1, 2, \cdots, p\}$，$\{t_i \mid i=1, 2, \cdots, p\}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{p} a_i=b$，$\sum\limits_{i=1}^{p} t_i=l_1$，$\sum\limits_{i=1}^{p} a_i t_i=l_2$，$\sum\limits_{i=1}^{p} t_i^2=l_3$，而且对每一个 $t_i>0$，存在非负整数列 $\{b_{ij} \mid j=1, 2, \cdots, a_i\}$，$i=1, 2, \cdots, p$ 满足

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{a_i} b_{ij}=t_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p\\ \sum_{i=1}^{p} a_i^2+\sum_{i,j} b_{ij}^2=l_4\end{cases}$$

②在①中交换 a 与 b ■

现在举例说明推论3.2的应用。

例2，判断序列(0,16,24,30,30,24,12,0,0,…,0)是否是某棵树的PLD。

解：应用推论3.2，

(i) $n=16+1=17$

(ii) $\sum_{i=2}^{7}x_i=136=n(n-1)/2$

(iii) $x_4+x_6=54$，二次方程 $y^2-15y+54=0$ 的两个根为6和9，

(iv) 取 $a=6$，$b=9$，则选 $p=2$，3，4，5都不能使条件①满足。

考虑取 $a=9$，$b=6$，选 $p=2$，3，都不能使条件②满足。选 $p=4$，则 $l_1=6$，$l_2=12$，$l_3=12$，$l_4=24$；取 $\{a_i\}=\{2,\ 2,\ 2,0\}$，$\{t_i\}=\{2,\ 2,\ 2,\ 0\}$，则 $\sum_{i=1}^{4}a_i=6=b$，$\sum_{i=1}^{4}t_i=6=l_1$，$\sum_{i=1}^{4}a_it_i=12=l_2$，$\sum_{i=1}^{4}t_i^2=12=l_3$；再取 $\{b_{1j}\}=\{2,\ 0\}$，$\{b_{2j}\}=\{2,\ 0\}$，$\{b_{3j}\}=\{2,0\}$，则 $\sum_{j=1}^{a_i}b_{ij}=t_i$，$i=1,2,\ 3$，$\sum_{i=1}^{4}a_i^2+\sum_{i,j}b_{ij}^2=24=l_4$，所以所给序列是某棵树的PLD。我们按照上面选得的 p，$\{a_i\}$，$\{b_{ij}\}$，就得到一棵以所给序列为PLD的一棵树（见图3(Ⅰ)）我们还可以选取下面三组值：

(Ⅱ) $p=4$，$\{a_i\}=\{2,\ 3,\ 1,\ 0\}$
$\{b_{1j}\}=\{2,\ 0\}$ $\{b_{2j}\}=\{1,\ 1,\ 0\}$，$\{b_{3j}\}=\{2\}$

(Ⅲ) $p=4$，$\{a_i\}=\{2,\ 3,\ 1,\ 0\}$，
$\{b_{1j}\}=\{1,\ 1\}$，$\{b_{2j}\}=\{2,\ 0,\ 0\}$，$\{b_{3j}\}=\{2\}$

(Ⅳ) $p=4$，$\{a_i\}=\{3,\ 1,\ 1,\ 1\}$，
$\{b_{1j}\}=\{3,\ 0,\ 0\}$，$\{b_{2j}\}=\{1\}$，$\{b_{3j}\}=\{1\}$，$\{b_{4j}\}$，$=\{1\}$

容易验证(iv)中条件②都满足，于是又得到具有同样PLD的三棵树，它们画在图3的(Ⅱ)、(Ⅲ)、(Ⅳ)中。但是再取 $p=5$，6，7，8都不能使条件②满足，所以所给序列为PLD的不同构的树共有4棵。

例2告诉我们，利用定理3或推论3.1和推论3.2，对于所给序列中非零个数较少及 x_2 的值为不太大时，判断它是否是某棵树的PLD是行之有效的，但对于序列中出现较多个非零个数及 x_2 的值很大时，就需要解个数较多的方程组，並出现更多个约束方程，这样给判断就带来了困难。但是，对于任意多个非零值的序列 $(0,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_n)$，我们还是得到了下列一个必要条件：

定理4 设非负整数序列 $(0,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{2k}\ x_{2k+1},\ 0,\ 0,\cdots\cdots,\ 0)$（其中 x_{2k} 或 $x_{2k+1}\neq 0$，$k\geqslant 2$）是某棵树的PLD，则二次方程 $y_2-(n-2)y+\sum_{i=2}^{k}x_{2i}=0$ 有两个正整数解。

证明：设 $(0,x_2,x_3,\ \cdots,x_{2k},\ x_{2k+1},\ 0,\cdots\cdots,0)$ 是某棵树的PLD，並设 k 是偶数，则由定

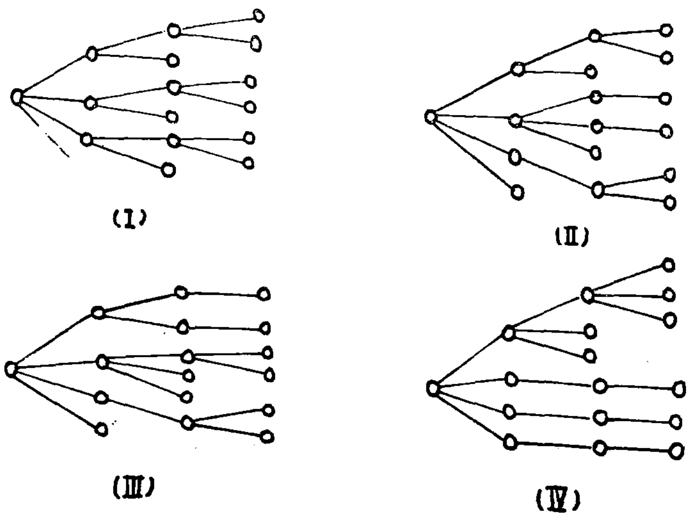

图 3

理 3 的条件立即得到：

$$x_3=\frac{1}{2}(f_1^{00}+f_2^{00}+f_3^{0}+\cdots\cdots+f_k^{00})-b_1+\frac{1}{2}(n-1)$$

$$\begin{aligned}x_5=&f_3^{02}+f_4^{02}+\cdots\cdots+f_k^{02}-b_3\\&+\frac{1}{2}[(f_2^{11}-f_2^{00})+(f_3^{11}-f_3^{00})+\cdots\cdots+(f_k^{11}-f_k^{00})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_7=&f_5^{04}+f_6^{04}+\cdots\cdots+f_k^{04}-b_5\\&+({}_4^{13}-f_4^{02})+(f_5^{13}-f_5^{02})+\cdots\cdots+(f_k^{13}-f_k^{02})\\&+\frac{1}{2}[(f_3^{22}-f_3^{11})+(f_4^{22}-f_4^{11})+\cdots\cdots+(f_k^{22}-f_k^{11})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_9=&f_7^{06}+f_8^{06}+\cdots\cdots+f_k^{06}-b_7\\&+(f_6^{15}-f_6^{04})+(f_7^{15}-f_7^{04})+\cdots\cdots+(f_k^{15}-f_k^{04})\\&+(f_5^{24}-f_5^{13})+(f_6^{24}-f_6^{13})+\cdots\cdots+(f_k^{24}-f_k^{13})\\&+\frac{1}{2}[(f_4^{33}-f_4^{22})+(f_5^{33}-f_5^{22}+\cdots\cdots+(f_k^{33}-f_k^{22})]\end{aligned}$$

…………

$$\begin{aligned}x_{2k-1}=&(f_k^{k-3,k-1}-f_k^{k-4,k-2})\\&+\frac{1}{2}[(f_{k-1}^{k-2,k-2}-f_{k-1}^{k-3,k-3})+(f_k^{k-2,k-2}-f_k^{k-3,k-3})]\end{aligned}$$

$$x_{2k+1}=\frac{1}{2}(f_k^{k-1,k-1}-f_k^{k-2,k-2})$$

于是 $2[x_3+x_5+\cdots\cdots+x_{2k+1})$

$$\begin{aligned}&=(f_1^{00}+f_2^{11}+f_3^{22}+\cdots\cdots+f_k^{k-1,k-1})-2(b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1})+(n-1)\\&\quad+2(f_3^{02}+f_5^{04}+\cdots\cdots+f_{k-1}^{0,k-2})+2(f_4^{13}+f_6^{15}+\cdots\cdots+f_k^{1,k-1})\\&\quad+2(f_5^{24}+f_7^{26}+\cdots\cdots+{}_{k-1}^{2,k-2})+\cdots\cdots+2f_k^{k-3,k-1}\\&=\sum_{i=1}^{k}b_i^2-2(b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1})+(n-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+2(b_1b_3+b_1b_5+\cdots\cdots+b_1b_{k-1})+2(b_2b_4+b_2b_6+\cdots\cdots+b_2b_k)\\
&+2(b_2b_5+b_3b_7+\cdots\cdots+b_3b_{k-1})+\cdots\cdots+2b_{k-2}b_k\\
&=(b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1})^2-2(b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1})\\
&+(b_2+b_4+\cdots\cdots+b_k)^2+(n-1)\\
&=\left(\sum_{i=1}^{k}b_i\right)^2-2(b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1})(b_2+b_4+\cdots\cdots+b_k)\\
&-2(b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1})+(n-1)\\
&=(n-1)^2-2(b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1}-1)(b_2+b_4+\cdots\cdots+b_k)-(n-1)
\end{aligned}$$

从而 $2\sum_{i=2}^{k}x_{2i}=n(n-1)-2(n-1)-2(x_3+x_5+\cdots\cdots+x_{2k+1})$

$$=2(b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1}-1)(b_2+b_4+\cdots\cdots+b_k)$$

即
$$\sum_{i=2}^{k}x_{2i}=(b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1}-1)(b_2+b_4+\cdots\cdots+b_k)$$

令
$$a=b_1+b_3+\cdots\cdots+b_{k-1}-1$$
$$b=b_2+b_4+\cdots\cdots+b_k$$

显然 a、b 都是正整数，且 $a+b=n-2$，这等价于二次方程 $y^2-(n-2)y+\sum_{i=2}^{k}x_{2i}=0$ 有两个正整数解。

当 k 是奇数时，类似地证明可得同样的结论。

参 考 文 献

[1] M. F. Capobianco, Statistical inference in finite populations having structure. Trans. New York Acad. Sci. Ser. II 32 (1970) 401—413.

[2] R. J. Faudree, C. C. Rousseau, and R. H. Schelp, Theory of patd length distributions I. Discrete Math. 6(1973) 35—53.

[3] R. J. Faudree and R. H. Schelp, Various length paths in graphs, "Theory and Applications of Graphs (Proceedings of the International Graph Theory Conference, Kalamazoo, 1976)", in Lecture Notes Mathematics. No. 642, pp. 160—173. Springer-Verlag, Berlin and New York, 1978.