关于强增生型变分包含问题解的Mann型迭代法

曾六川，王丹琼
(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘 要：研究p-一致光滑的实Banach空间($1<p\leqslant 2$)中一类强增生型变分包含问题解的Mann型迭代逼近问题. 在仅假设强增生映象的连续性下，利用徐宗本教授等人(1991年)给出的对偶映象J_p的Hölder连续性，证明了具误差的Mann迭代法强收敛到这类变分包含的唯一解.

关键词：变分包含；强增生映象；Mann型迭代法
中图分类号：O177.91 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-5137(2006)01-0011-05

1 前言与预备知识

设X是一实Banach空间，X^*是其对偶空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$X$与$X^*$间的广义对偶对，$D(T)$与$R(T)$分别表映象$T$的定义域和值域. 设$T,A:X\to X$, $g:X\to X^*$是3个映象，$\varphi:X^*\to R\cup\{+\infty\}$为真凸的下半连续泛函. 1999年，张石生教授[1]引入与研究了下列变分包含问题$V_{\mathrm{VIP}}(T,A,g,\varphi)$：对给定的$f\in X$，求$u\in X$，使得：

$$\begin{cases} g(u)\in D(\partial\varphi), \\ \langle Tu-Au-f,\ v-g(u)\rangle \geqslant \varphi(g(u))-\varphi(v),\ \forall v\in X^*, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\partial\varphi$表示φ的次微分.

如果X是实Hilbert空间H，则问题(1.1)等价于如下问题：对给定的$f\in H$，求$u\in X$，使得：

$$\begin{cases} g(u)\in D(\partial\varphi), \\ \langle Tu-Au-f,\ v-g(u)\rangle \geqslant \varphi(g(u))-\varphi(v),\ \forall v\in H. \end{cases} \tag{1.2}$$

问题(1.2)称为H中的变分包含问题，它曾在[2,3]等文中研究过. 易见，通过适当地选择算子T,A,g及点f与泛函φ，若干熟知的变分不等式类问题，如作者在文[4,5]中研究过的变分不等式类，都可得到.

最近，作者[6,7]研究了问题(1.1)的解的存在唯一性及其具误差的Ishikawa迭代的收敛性，其结果改进和推广了张石生教授[1]的相应结论.

定理1.1[6] 设X是一实的自反Banach空间，$T,A:X\to X$是两个一致连续的映象，$g:X\to X^*$是一个映象，而$\varphi:X^*\to R\cup\{+\infty\}$是具有连续的Gâteaux微分$\partial\varphi$的泛函，且满足下列条件：

(i) $T-A+\partial\varphi\circ g:X\to X$是具强增生常数$k\in(0,1)$的强增生映象；

(ii) $\partial\varphi\circ g:X\to X$是一致连续的映象.

收稿日期：2005-04-04
基金项目：上海市曙光计划的资助项目(BL200404).
作者简介：曾六川(1965-)，男，博士，上海师范大学数理信息学院教授；王丹琼(1981-)，女，上海师范大学数理信息学院硕士研究生.

设$\{u_n\}$, $\{v_n\}$是X中的序列, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$是$[0,1]$中的序列,满足条件:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$, $\|v_n\| \to 0\ (n\to\infty)$;

(2) $\beta_n \to 0\ (n \to \infty)$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$, $\alpha_n \to 0\ (n\to\infty)$.

对任给的$f\in X$, 定义映象$S:X\to X$, $Sx = f-(Tx - Ax + \partial\varphi(g(x))) + x$. 如果对任给的$x_0\in X$, 由下式定义具误差的 Ishikawa 迭代序列$\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Sy_n + u_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Sx_n + v_n \end{cases} \quad (n = 0,1,2,\cdots), \tag{1.3}$$

则$\{x_n\}$强收敛到问题(1.1)的唯一解的充要条件是$\{Sy_n\}$有界且$\{\beta_n Sx_n\}$强收敛到零向量.

本文在p-一致光滑的实 Banach 空间$(1<p\leqslant 2)$中研究强增生型变分包含(1.1)的解具误差的 Mann 迭代法的收敛性问题. 本文结果改进和推广了上述定理及张石生教授[1]与作者[7]的相应结果.

下面,我们回顾一些预备知识. 对$1<p<\infty$, 定义如下的映象$J_p:X\to 2^{X^*}$,

$$J_p(x) = \{x^*\in X^*:\langle x,x^*\rangle = \|x^*\|\,\|x\|,\ \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\},$$

称为具有规函数$\phi(t) = t^{p-1}$的对偶映象. 特别地,具有规函数$\phi(t) = t$的对偶映象,记成J, 且称为正规对偶映象. 已熟知[8], $J_p(x) = \|x\|^{p-2}J(x)$, $\forall x\in X\setminus\{0\}$, $1<p<\infty$. 而且,对偶映象J_p可等价地定义为

$$J_p(x):=\partial(p^{-1}\|x\|^p) = \{x^*\in X^*:p^{-1}\|y\|^p - p^{-1}\|x\|^p \geqslant \langle y-x,x^*\rangle,\forall y\in X\}. \tag{1.4}$$

也熟知, $J_p(\lambda x) = \lambda^{p-1}J_p(x)$, $\forall\lambda\geqslant 0$. 回顾到, X称为一致光滑的,若其光滑模$\rho_X(\tau)$,

$$\rho_X(\tau) = \sup\{(\|x+y\| + \|x-y\|)/2 - 1: x,y\in X,\ \|x\| = 1,\ \|y\|\leqslant\tau\},\ \forall\tau>0,$$

满足条件: $\rho_X(\tau)/\tau\to 0\ (\tau\to 0)$. 已熟知[8], 若$X$是一致光滑的,则是光滑的自反 Banach 空间,而且J_p是单值的并在X的任一有界集上是一致连续的. 对$1<p\leqslant 2$, X称为p-一致光滑的,如果$\rho_X(\tau)\leqslant d\tau^p$, $\forall\tau>0$, 其中, $d>0$是常数. 据文[8]知,对实 Hilbert 空间H, $\rho_H(\tau) = (1+\tau^2)^{1/2} - 1$, 故$H$是2-一致光滑的. 又知,当$1<p<2$时, L_p(或l_p)是p-一致光滑的;当$p\geqslant 2$时, L_p(或l_p)是2-一致光滑的.

命题 1.1 设X是p-一致光滑的实 Banach 空间$(1<p\leqslant 2)$, 则:

$$\|x+y\|^p \leqslant \|x\|^p + p\langle y,J_p(x+y)\rangle,\ \forall x,y\in X.$$

证明 由(1.4)即得结论.

引理 1.1[8] 设$1<p\leqslant 2$, X是实p-一致光滑的 Banach 空间,则$J_p:X\to X^*$是$(p-1)$幂 Holder 连续的,即存在$r>0$,使

$$\|J_p(x) - J_p(y)\| \leqslant r\|x-y\|^{p-1},\ \forall x,y\in X. \tag{1.5}$$

引理 1.2[9] 设$\{\mu_n\}$与$\{\nu_n\}$是两个非负实数列,满足下列不等式:

$$\mu_{n+1}\leqslant\gamma\mu_n + \nu_n,\ \forall n\geqslant 0,$$

其中$\gamma\in[0,1)$且$\lim\limits_{n\to\infty}\nu_n = 0$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = 0$.

后面,将用到下列定义与结论.

定义 1.1 映象$T:D(T)\subset X\to X$称为增生的,如果对任给的$x,y\in D(T)$,存在$j(x-y)\in J(x-y)$,使得$\langle Tx-Ty,J(x-y)\rangle\geqslant 0$; 或等价地,对任给的$x,y\in D(T)$,存在$j_p(x-y)\in J_p(x-y)$,使得$\langle Tx-Ty,j_p(x-y)\rangle\geqslant 0$, 其中$1<p<\infty$.

映象$T:D(T)\subset X\to X$称为强增生的,如果存在常数$k\in(0,1)$,使得对任给的$x,y\in D(T)$,存在$j(x-y)\in J(x-y)$满足$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\geqslant k\cdot\|x-y\|^2$, 上式中的$k$称$T$的强增生常数;或等价地,对任给的$x,y\in D(T)$, 存在$j_p(x-y)\in J_p(x-y)$满足:

$$\langle Tx-Ty,j_p(x-y)\rangle\geqslant k\cdot\|x-y\|^p,$$

其中 $1 < p < \infty$.

引理 1.3[1]　设 X 是一实的自反 Banach 空间,则下列结论等价:

(i) $x^* \in X$ 是变分包含问题(1.1) 的解;

(ii) $x^* \in X$ 是映象 $S:X \to 2^X$, $S(x) = f - (Tx - Ax + \partial\varphi(g(x))) + x$ 的不动点;

(iii) $x^* \in X$ 是方程 $f = Tx - Ax + \partial\varphi(g(x))$ 的解.

2　主要结果

定理 2.1　设 $1 < p \leqslant 2$, X 是 p- 一致光滑的实 Banach 空间, $T,A:X \to X$ 是两个连续的映象, $g:X \to X^*$ 是一个映象,而 $\varphi:X^* \to R \cup \{+\infty\}$ 是具有连续的 Gâteaux 微分 $\partial\varphi$ 的泛函,且满足下列条件:

(i) $T - A + \partial\varphi \circ g:X \to X$ 是具强增生常数 $k \in (0,1)$ 的强增生映象;

(ii) $\partial\varphi \circ g: X \to X$ 是连续的映象.

又设 $\{u_n\}$ 是 X 中的序列, $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的实数列,满足条件:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \| u_n \| < \infty$;

(2) $0 < \alpha < \alpha_n \leqslant \min\left\{\left(\dfrac{p\eta}{(r+1)p-1}\right)^{1/(p-1)}, \dfrac{1}{p-(k-\eta)}, 1\right\}$, 对某个 $\eta \in (0,k)$.

对任给的 $f \in X$, 定义映象 $S:X \to X: Sx = f - (Tx - Ax + \partial\varphi(g(x))) + x$. 如果对任给的 $x_0 \in X$, $\{x_n\}$ 是由下列具误差的 *Mann* 迭代程序定义的序列:

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Sx_n + u_n. \tag{2.1}$$

则(i) 变分包含(1.1) 有唯一解 x^*; (ii) 当 $\{Sx_n\}$ 有界时,

$$x_n \to x^* (n \to \infty) \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \to 0 \ (n \to \infty).$$

证明　如同文[6]的定理 2.1 中的证明一样,对任给的 $f \in X$, 易证方程

$$f = (T - A + \partial\varphi \circ g)(x)$$

在 X 中有唯一解 x^*. 由于 X 是自反的,故由引理 1.3 知, x^* 是变分包含(1.1) 的唯一解. 因而 x^* 也是 S 在 X 中的唯一不动点.

现证, $x_n \to x^* (n \to \infty) \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \to 0 \ (n \to \infty)$.

先证,若 $\{Sx_n\}$ 有界. 事实上,令:

$$d = \sup_{n \geqslant 0} \| Sx_n - x^* \| + \| x_0 - x^* \|,$$

$$M = d + \sum_{n=0}^{\infty} \| u_n \| + 1.$$

可用归纳法证明:

$$\| x_{n+1} - x^* \| \leqslant d + \sum_{j=0}^{\infty} \| u_j \| \leqslant M, \ \forall n \geqslant 0.$$

"必要性". 显然.

"充分性". $\| x_{n+1} - x_n \| \to 0 \ (n \to \infty)$. 利用命题 1.1 并根据(2.1),推得

$$\begin{aligned} \alpha_n^p \| Sx_n - x^* \|^p = & \| x_{n+1} - x_n + \alpha_n(x_n - x^*) - u_n \|^p = \\ & \| \alpha_n(x_n - x^*) + x_{n+1} - x_n - u_n \|^p \leqslant \\ & \alpha_n^p \| x_n - x^* \|^p + p\langle x_{n+1} - x_n - u_n, J_p(\alpha_n(Sx_n - x^*))\rangle \leqslant \\ & \alpha_n^p \| x_n - x^* \| + pM^{p-1}(\| x_{n+1} - x_n \| + \| u_n \|). \end{aligned} \tag{2.2}$$

再由(2.1),命题 1.1 与引理 1.1,可得

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - x^* \|^p = & \| (1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n(Sx_n - x^*) + u_n \|^p \leqslant \\ & \| (1-\alpha_n)(x_n - x^*) + \alpha_n(Sx_n - x^*) \|^p + p\langle u_n, J_p(x_{n+1} - x^*)\rangle \leqslant \end{aligned}$$

$$p\langle u_n, J_p(x_{n+1}-x^*)\rangle + (1-\alpha_n)^p\|x_n-x^*\|^p +$$
$$p\alpha_n\langle Sx_n-x^*, J_p((1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sx_n-x^*))\rangle \le$$
$$pM^{p-1}\|u_n\| + (1-\alpha_n)^p\|x_n-x^*\|^p +$$
$$p\alpha_n\langle Sx_n-x^*, J_p((1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sx_n-x^*))\rangle -$$
$$p\alpha_n\langle Sx_n-x^*, J_p((1-\alpha_n)(x_n-x^*))\rangle + p\alpha_n\langle Sx_n-x^*, J_p((1-\alpha_n)(x_n-x^*))\rangle \le$$
$$pM^{p-1}\|u_n\| + (1-\alpha_n)^p\|x_n-x^*\|^p +$$
$$p\alpha_n\|Sx_n-x^*\|\cdot\|J_p((1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Sx_n-x^*)) -$$
$$J_p((1-\alpha_n)(x_n-x^*))\| + p\alpha_n(1-\alpha_n)^{p-1}\langle Sx_n-x^*, J_p((1-\alpha_n)(x_n-x^*))\rangle \le$$
$$(1-\alpha_n)^p\|x_n-x^*\|^p + rp\|\alpha_n(Sx_n-x^*)\|^p + p(1-k)\alpha_n\|x_n-x^*\|^p + pM^{p-1}\|u_n\| \le$$
$$(1-\alpha_n)^p\|x_n-x^*\|^p + rp\{\alpha_n^p\|x_n-x^*\|^p + pM^{p-1}(\|x_{n+1}-x_n\| + \|u_n\|)\} +$$
$$p(1-k)\alpha_n\|x_n-x^*\|^p + pM^{p-1}\|u_n\| =$$
$$[(1-\alpha_n)^p + p(1-k)\alpha_n + rp\alpha_n^p]\|x_n-x^*\|^p +$$
$$rp^2M^{p-1}(\|x_{n+1}-x_n\| + \|u_n\|) + pM^{p-1}\|u_n\|. \tag{2.3}$$

由于 $0<\alpha<\alpha_n\le\min\left\{\left(\frac{p\eta}{(r+1)p-1}\right)^{1/(p-1)}, \frac{1}{p-(k-\eta)}, 1\right\}$ 对某个 $\eta\in(0,k)$,注意到 $(1-u)^{p-1}\le 1-(p-1)u$, $\forall u\in(0,1)$, $1<p\le 2$, 故有

$$(1-\alpha_n)^p + p(1-k)\alpha_n + rp\alpha_n^p \le$$
$$(1-(p-1)\alpha_n)(1-\alpha_n) + p(1-k)\alpha_n + rp\alpha_n^p \le$$
$$1-pk\alpha_n + ((r+1)p-1)\alpha_n^p \le$$
$$1-pk\alpha_n + ((r+1)p-1)\frac{p\eta}{(r+1)p-1}\alpha_n =$$
$$1-p(k-\eta)\alpha_n,$$

且 $0\le 1-p(k-\eta)\alpha_n\le 1-p(k-\eta)\alpha<1$. 由于把(2.4)代入(2.3),可得

$$\|x_{n+1}-x^*\|^p \le (1-p(k-\eta)\alpha_n)\|x_n-x^*\|^p + rp^2M^{p-1}(\|x_{n+1}-x_n\| + \|u_n\|) + pM^{p-1}\|u_n\|$$
$$\le (1-p(k-\eta)\alpha)\|x_n-x^*\|^p + rp^2M^{p-1}(\|x_{n+1}-x_n\| + \|u_n\|) + pM^{p-1}\|u_n\| =$$
$$(1-p(k-\eta)\alpha)\|x_n-x^*\|^p + \vartheta_n, \tag{2.5}$$

其中 $\vartheta_n = rp^2M^{p-1}(\|x_{n+1}-x_n\| + \|u_n\|) + pM^{p-1}\|u_n\|$.

注意到 $\|x_{n+1}-x_n\|\to 0\ (n\to\infty)$. 因而,$\vartheta_n\to 0\ (n\to\infty)$. 从而,把引理 1.2 用于(2.5),即得 $x_n\to x^*\ (n\to\infty)$. 证毕.

注 2.1 定理 2.1 在下列方面改进与推广了文[6]的定理 2.1:其一,把文[6]的定理 2.1 中一致连续的映象拓宽到了连续映象的情形;其二,定理 2.1 中用于求近似解的具误差的 Mann 迭代法简单易行;其三,由于没有假设强增生映象 $T-A+\partial\varphi\circ g$ 的一致连续性,故在证逼近解 x_n 收敛到 x^* 的方法上,对文[6]的定理2.1 的证法作了新的突破,即使用了徐宗本教授与 Roach[8] 给出的对偶映象 J_p 的 Hölder 连续性.

回顾定理 2.1 的证明,可得到下列结果.

定理 2.2 设 X 是 p-一致光滑的实 Banach 空间 $(1<p\le 2)$, $T,A:X\to X$ 是两个连续的映象,$g:X\to X^*$ 是任一映象,且 $T-A:X\to X$ 是具强增生常数 $k\in(0,1)$ 的强增生映象. 对任给的 $f\in X$, 定义映象 $S:X\to X: S(x)=f-(T-A)(x)+x$. 设 $\{u_n\}$ 是 X 中的序列,$\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的序列,满足定理2.1 中的条件(1) ~ (2). 如果对任给的 $x_0\in X$, $\{x_n\}$ 是由(2.1) 式定义的具误差的 Mann 迭代序列,则(i) 变分不等式

$$\langle Tx-Ax-f, v-g(x)\rangle \ge 0,\ \forall v\in X^*,$$

有唯一解 x^* ; (ii) 当 $\{Sx_n\}$ 有界时, $x_n \to x^* (n \to \infty) \Leftrightarrow x_{n+1} - x_n \to 0 \ (n \to \infty)$.

参考文献:

[1] 张石生. Banach 空间中增生型变分包含解的 Mann 和 Ishikawa 迭代逼近[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(6):551 -558.

[2] HASSOUNI A, MOUDAFI A. A perturbed algorithm for variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1994, 185(3): 706 -721.

[3] DING X P. Perturbed proximal point algorithms for generalized quasi - variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1997, 210:88 -101.

[4] ZENG L C. Iterative algorithms for finding approximatie solutions for general strongly nonlinear variational inequalities [J]. J Math Anal Appl, 1994,187(2):352 -360.

[5] ZENG L C. Iterative algorithm for finding approximate solutions to completely generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1996, 201:180 -194.

[6] 曾六川. Banach 空间中强增型变分包含解的具误差的 Ishikawa 迭代逼近[J]. 数学物理学报(A 辑), 2002,22(1):99 -106.

[7] 曾六川. 非一致光滑的 Banach 空间中强增型变分包含问题解的带误差的 Ishikawa 迭代逼近[J]. 工程数学学报, 2002, 19(2):98 -102.

[8] XU Z B, ROACH G F. Characteristic inequalities in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1991, 157:189 -210.

[9] OSILIKE M O. Stable iteration procedures for nonlinear pseudocontractive and accretive operators in arbitrary Banach spaces[J]. Indian J Pure Appl Math, 1997, 28:1017 -1029.

On the Mann-type iteration method for solutions to varational inclusion problems with strongly accretive-type mappings

ZENG Lu-chuan, WANG Dan-qiong

(Mathmatics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: We investigate the Mann-type iterative approximation problem of solutions to a class of variational inclusion problems with strongly accretive-type mappings in a real p -uniformly smooth Banach space, $1 < p \leqslant 2$. Under the only assumption of the continuity of strongly accretive mappings, and by virtue of the Hölder continuity of th duality mapping J_p given by Prof. Xu Zongben et al. (1991), we prove that the Mann iteration method with error converges strongly toward the unique solution to this class of variational inclusion problems.

Key words: variational inclusion; strongly accretive mapping; Mann-type iteration method