关于奇异束的 Leverrier-Hermite 算法

王国荣[1]，仇 璘[2]，高 璟[3]

(1. 上海师范大学 数学科学学院，上海 200234；2. 日本名古屋大学；3. 上海应用技术学院，上海 200233)

摘 要：给出了一个同时计算奇异束 $\mu E-A$ 的伴随阵 $B(\mu)$ 和行列式 $a(\mu)$ 的 Leverrier-Hermite 算法，其中 E 是奇异阵，但 $\det(\mu E-A)\neq 0$. 这问题来自奇异线性控制系统[6,7]. $B(\mu)$ 和 $a(\mu)$ 可表成 Hermite 正交多项式的基底，解决了 BARNETT S 的一个公开问题[2].

关键词：奇异束；伴随阵；行列式；Hermite 正交多项式

中图分类号：O151.21　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-5137(2001)03-0001-05

0 引 言

设 A 为 n 阶方阵，其特征多项式为

$$a(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\lambda^n+\tilde{a}_1\lambda^{n-1}+\cdots+\tilde{a}_{n-1}\lambda+\tilde{a}_n, \tag{1}$$

这里 I 为 n 阶单位阵，且 $\det(\lambda I-A)$. 设

$$B(\lambda)=\operatorname{adj}(\lambda I-A)=\lambda^{n-1}I+\lambda^{n-2}\widetilde{B}_1+\cdots+\lambda\widetilde{B}_{n-2}+\widetilde{B}_{n-1}, \tag{2}$$

则

$$(\lambda I-A)^{-1}=B(\lambda)/a(\lambda). \tag{3}$$

应用 Leverrier-Fadeev 算法，便可通过计算序列 $\{\tilde{a}_k\}$ 和 $\{\widetilde{B}_k\}$，求出 $(\lambda I-A)^{-1}$. 其中系数 $\tilde{a}_k$ 和 $\widetilde{B}_k$ 的算法为

$$\tilde{a}_1=-\operatorname{tr}A,\quad \tilde{a}_k=-\frac{1}{k}\operatorname{tr}(A\widetilde{B}_{k-1}),\quad k=2,3,\cdots,n, \tag{4}$$

$$\widetilde{B}_1=A+\tilde{a}_1 I,\quad \widetilde{B}_k=\tilde{a}_1 I+A\widetilde{B}_{k-1},\quad k=2,3,\cdots,n-1, \tag{5}$$

这里 tr 表示迹.

文[2]中 Leverrier-Fadeev 算法被推广到其中的 $B(\lambda)$ 和 $a(\lambda)$ 是以正交多项式 $\{P_i(\lambda)\}$ 为基底的情形，其中 $\{P_i(\lambda)\}$ 由标准的三项递推关系确定[3].

$$P_i(\lambda)=(\alpha_i\lambda+\beta_i)P_{i-1}(\lambda)-\gamma_i P_{i-2}(\lambda),\quad i\geqslant 2. \tag{6}$$

且 $P_0(\lambda)=1$, $P_1(\lambda)=\alpha_1\lambda+\beta_1$. 这样(2)式和(3)式又可用广义多项式表示为

$$B(\lambda)=\operatorname{adj}(\lambda I-A)=\frac{P_{n-1}(\lambda)B_0+P_{n-2}(\lambda)B_1+\cdots+P_0(\lambda)B_{n-1}}{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}, \tag{7}$$

$$a(\lambda)=\det(\lambda I-A)=\frac{P_n(\lambda)+a_1P_{n-1}(\lambda)+\cdots+a_nP_0(\lambda)}{\alpha_1\cdots\alpha_n}, \tag{8}$$

收稿日期：2001-04-05

基金项目：国家自然科学基金(19971057)；上海市和上海高校科技发展基金(00JC14057)

作者简介：王国荣(1940-)，男，上海师范大学数学科学学院教授，博士生导师.

这里 $P_n(\lambda)$ 中 λ^n 的系数是 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.

$$B_0 = I,\quad B_1 = \alpha_{n-1}\left(\frac{a_1}{\alpha_n}I + \frac{\beta_n}{\alpha_n}B_0 + AB_0\right), \tag{9}$$

$$B_k = \alpha_{n-k}\left(\frac{a_k}{\alpha_n}I - \frac{\gamma_{n-k+2}}{\alpha_{n-k+2}}B_{k-2} + \frac{\beta_{n-k+1}}{\alpha_{n-k+1}}B_{k-1} + AB_{k-1}\right),\ k = 2,3,\cdots,n-1 \tag{10}$$

和

$$a_1 = -\alpha_n\left(\mathrm{tr}A + \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right). \tag{11}$$

(8)式中的其他系数可通过下式取得

$$\frac{\mathrm{d}a(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \mathrm{tr}(B(\lambda)). \tag{12}$$

本文研究一个同时计算奇异束 $\mu E - A$ 的伴随阵 $B(\mu)$ 和行列式 $a(\mu)$ 的算法,其中 E 是奇异阵,但 $\det(\mu E - A) \neq 0$. 这问题多见于奇异线性控制系统[6,7]. 本文给出了以 Hermite 正交多项式为基底的计算奇异束 $\mu E - A$ 的 $B(\mu)$ 和 $a(\mu)$ 的一个算法,从而解决了 BAEBETT S 的一个公开问题[4].

1 以一般多项式为基底

对矩阵 $A(\mu)$,其中 μ 为参数,如同(9)~(12)式,其对应的系数 $a_k(\mu)$ 和 $B_k(\mu)$ 分别为

$$\tilde{a}(\lambda) = \det(\lambda I - A(\mu)) = \frac{P_n(\lambda) + a_1(\mu)P_{n-1}(\lambda) + \cdots + a_nP_0(\lambda)}{\alpha_1\cdots\alpha_n}, \tag{13}$$

$$\tilde{B}(\lambda) = \mathrm{adj}(\lambda I - A(\mu)) = \frac{P_{n-1}(\lambda)B_0(\mu) + P_{n-2}(\lambda)B_1(\mu) + \cdots + P_0(\lambda)B_{n-1}(\mu)}{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}, \tag{14}$$

$$B_0(\mu) = I,\quad B_1(\mu) = \alpha_{n-1}\left(\frac{a_1(\mu)}{\alpha_n}I + \frac{\beta_n}{\alpha_n}B_0(\mu) + A(\mu)B_0(\mu)\right), \tag{15}$$

$$B_k(\mu) = \alpha_{n-k}\left(\frac{a_k(\mu)}{\alpha_n}I - \frac{\gamma_{n-k+2}}{\alpha_{n-k+2}}B_{k-2}(\mu) + \frac{\beta_{n-k+1}}{\alpha_{n-k+1}}B_{k-1}(\mu) + A(\mu)B_{k-1}(\mu)\right),\quad k = 2,3,\cdots,n-1 \tag{16}$$

和

$$a_1(\mu) = -\alpha_n\left(\mathrm{tr}A(\mu) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right), \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}a(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \mathrm{tr}(\tilde{B}(\lambda)). \tag{18}$$

若 $A(\mu) = -\mu E + A$,其中 E 为奇异阵,而 $\det(\mu E - A) \neq 0$. 由(13)、(14)式得

$$a(\mu) = \det(\mu E - A) = \tilde{a}(0) = \frac{P_n(0) + a_1(\mu)P_{n-1}(0) + \cdots + a_nP_0(0)}{\alpha_1\cdots\alpha_n}, \tag{19}$$

$$B(\mu) = \mathrm{adj}(\mu E - A) = \tilde{B}(0) = \frac{P_{n-1}(0)B_0(\mu) + P_{n-2}(0)B_1(\mu) + \cdots + P_0(0)B_{n-1}(\mu)}{\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}}, \tag{20}$$

2 以 Hermite 正交多项式为基底

Hermite 正交多项式由下式定义

$$H_i(\lambda) = 2\lambda H_{i-1}(\lambda) - 2(i-1)H_{i-2}(\lambda),\ i \geq 2. \tag{21}$$

且 $H_0(\lambda) = 1$, $H_1(\lambda) = 2\lambda$. 由于 $\alpha_i = 2, \beta = 0, \gamma_i = 2(i-1)$, (16)式化为

$$B_k(\mu) = a_k(\mu)I - 2(n-k+1)B_{k-2}(\mu) + 2A(\mu)B_{k-1}(\mu), \tag{22}$$

而(13)、(14)式为

$$\tilde{a}(\lambda) = \det(\lambda I - A(\mu)) = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}a_{n-i}(\mu)H_i(\lambda), \tag{23}$$

$$\widetilde{B}(\lambda)=\mathrm{adj}(\lambda I-A(\mu))=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}B_{n-i-1}(\mu)H_i(\lambda). \tag{24}$$

由(18)式得

$$\mathrm{tr}B_k(\mu)=(n-k)a_k(\mu). \tag{25}$$

对(22)式两端矩阵同时取迹，利用(25)式得

$$-ka_k(\mu)=2\mathrm{tr}(A(\mu)B_{k-1}(\mu))-2(n-k+1)(n-k+2)a_{k-2}(\mu). \tag{26}$$

又 $H_i(\mu)$ 的次数为 i，由(22)，(26)两式可知 $a_k(\mu)$，$k=1,2,\cdots,n$ 和 $B_k(\mu)$，$k=1,2,\cdots,n-1$ 中次数最多为 k. 这样 $B_i(\mu)$ 和 $a_i(\mu)$ 又可写为

$$B_i(\mu)=\sum_{k=0}^{i}B_{i,k}H_k(\mu),\quad i=1,2,\cdots,n-1, \tag{27}$$

$$a_i(\mu)=\sum_{k=0}^{i}a_{i,k}H_k(\mu),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{28}$$

将(27)，(28)替换递推式中的 $B_k(\mu)$，$k=1,2,\cdots,n-1$ 和 $a_k(\mu)$，$k=1,2,\cdots,n$，且由(16)式得到

$$2\mu H_{i-1}(\mu)=H_i(\mu)+2(i-1)H_{i-2}(\mu). \tag{29}$$

通过比较每个方程两端正交多项式 $H_i(\mu)$，$i=0,1,\cdots,k$ 的系数可得到以下算法.

Leverrier-Hermite 算法　以 Hermite 正交多项式为基底时，式(28)中的系数 $a_{i,k}$ 和式(27)中的系数矩阵 $B_{i,k}$ 分别为

$$\begin{cases}a_{1,0}=-2\mathrm{tr}A\\ a_{1,1}=\mathrm{tr}E\\ a_{i,0}=-\dfrac{2}{i}[\mathrm{tr}(AB_{i-1,0}-EB_{i-1,1})-(n-i+1)(n-i+2)a_{i-2,0}]\\ a_{i,k}=-\dfrac{2}{i}[\mathrm{tr}(AB_{i-1,k}-\dfrac{1}{2}EB_{i-1,k-1}-(k+1)EB_{i-1,k+1})-(n-i+1)(n-i+2)a_{i-2,k}]\\ \qquad k=1,2,\cdots,i-2\\ a_{i,i-1}=-\dfrac{2}{i}\mathrm{tr}(AB_{i-1,i-1}-\dfrac{1}{2}EB_{i-1,i-2})\\ a_{i,i}=-\dfrac{1}{i}\mathrm{tr}(EB_{i-1,i-1}),\end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases}B_{1,0}=a_{1,0}I+2A\\ B_{1,1}=a_{1,1}I-E\\ B_{i,0}=a_{i,0}I-2(n-i+1)B_{i-2,0}+2AB_{i-1,0}-2EB_{i-1,1}\\ B_{i,k}=a_{i,k}I-2(n-i+1)B_{i-2,k}-EB_{i-1,k-1}-2(k+1)EB_{i-1,k+1}+2AB_{i-1,k}\\ \qquad k=1,2,\cdots,i-2\\ B_{i,i-1}=a_{i,i-1}I-EB_{i-1,i-2}+2AB_{i-1,i-1}\\ B_{i,i}=a_{i,i}I-EB_{i-1,i-1},\ i\geqslant 2.\end{cases} \tag{31}$$

3 算　例

取 $A=\begin{pmatrix}1&-4&-1&-4\\2&0&5&-4\\-1&1&-2&3\\-1&4&-1&6\end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，

现在运用 Leverrier-Hermite 算法,由(30),(31)式得 $a_{1,0}=-2\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=10$, $a_{1,1}=\mathrm{tr}\boldsymbol{E}=3$,从而

$$B_{1,0}=a_{1,0}+2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-8&-8&-2&-8\\4&-10&10&-8\\-2&2&-14&6\\-2&8&-2&2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{1,1}=a_{1,1}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

又由(30)式得

$$a_{2,0}=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}_{1,0}+\boldsymbol{EB}_{1,1})+3\times4\times a_{0,0}=54,$$

$$a_{2,1}=-\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}_{1,1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{EB}_{1,0})=-20,\quad a_{2,2}=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{EB}_{1,1})=3,$$

这样

$$\boldsymbol{B}_{2,0}=a_{2,0}\boldsymbol{I}-2\times3\times\boldsymbol{B}_{0,0}+2\boldsymbol{AB}_{1,0}-2\boldsymbol{EB}_{1,1}=\begin{pmatrix}16&-4&-40&20\\-36&-28&-132&12\\20&36&112&-12\\28&28&88&8\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{2,1}=a_{2,1}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{EB}_{1,0}+2\boldsymbol{AB}_{1,1}=\begin{pmatrix}-8&-16&-2&-8\\8&-20&20&-16\\-2&4&-14&6\\-2&16&-2&2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{2,2}=a_{2,2}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{EB}_{1,1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

由(30)式继续可得

$$a_{3,0}=-\frac{2}{3}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}_{2,0}-\boldsymbol{EB}_{2,1})-2\times3\times a_{1,0}]=-136,$$

$$a_{3,1}=-\frac{2}{3}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}_{2,1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{EB}_{2,0}-2\boldsymbol{EB}_{2,2})-2\times3\times a_{1,1}]=136,$$

$$a_{3,2}=-\frac{2}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}_{2,2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{EB}_{2,1})=-10,\quad a_{3,3}=\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{EB}_{2,2})=1.$$

同理由(26)式

$$\boldsymbol{B}_{3,0}=\begin{pmatrix}-32&-16&60&-48\\24&24&216&-72\\-4&-40&-156&44\\-12&-16&-132&28\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}_{3,1}=\begin{pmatrix}48&-4&-80&64\\-36&-28&-132&12\\8&36&100&-16\\32&28&80&16\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_{3,2}=\begin{pmatrix}0&-8&0&0\\4&-10&10&-8\\0&2&0&0\\0&8&0&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}_{3,3}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$a_{4,0}=-\frac{1}{2}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}_{3,0}-\boldsymbol{EB}_{3,1})-2a_{2,0}]=280,$$

$$a_{4,1}=-\frac{1}{2}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}_{3,1}-\boldsymbol{EB}_{3,0})-2\boldsymbol{EB}_{3,2})-2a_{2,1}]=-160,$$

$$a_{4,2}=-\frac{1}{2}[\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}_{3,2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{EB}_{3,1})-3\boldsymbol{EB}_{3,3})-2a_{2,2}]=82,$$

$$a_{4,3}=-\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}_{3,3}-\frac{1}{2}\boldsymbol{EB}_{3,2})=0,\quad a_{4,4}=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(\boldsymbol{EB}_{3,3})=0.$$

由此,矩阵 $\mu\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的行列式 $a(\mu)$ 与伴随阵 $\boldsymbol{B}(\mu)$ 分别由(19)、(20)式得

$$a(\mu)=\frac{1}{2^4}(H_4(0)+a_1(\mu)H_3(0)+a_2(\mu)H_2(0)+a_3(\mu)H_1(0)+a_4(\mu)H_0(0))=$$

$$\frac{1}{16}\times(180H_0(\mu)-120H_1(\mu)+76H_2(\mu)),$$

$$B(\mu)=\frac{1}{2^3}(H_3(0)B_0(\mu)+H_2(0)B_1(\mu)+H_1(0)B_2(\mu)+H_0(0)B_3(\mu))=$$

$$\frac{1}{8}((B_{3,0}-2B_{1,0})H_0(\mu)+B_{3,1}-2B_{1,1})H_1(\mu)+B_{3,2}H_2(\mu)+B_{3,3}H_3(\mu)).$$

这与按定义计算的 $a(\mu)=\det(\mu E-A)=19\mu^2-15\mu+2$ 和

$$B(\mu)=\mathrm{adj}(\mu E-A)=\begin{pmatrix} 11\mu-2 & -4\mu^2-\mu+2 & -20\mu+8 & 16\mu-4 \\ 2\mu^2-9\mu+1 & \mu^3-5\mu^2-10\mu+8 & 5\mu^2-33\mu+22 & -4\mu^2+3\mu-5 \\ 2\mu & \mu^2+9\mu-6 & 24\mu-16 & -4\mu+4 \\ 8\mu-1 & 4\mu^2+7\mu-6 & 20\mu-16 & 3\mu+3 \end{pmatrix}$$

结果一致.

参考文献：

[1] GANTMACHER F R. The theory of Matrices[M]. Chelsea, New York, 1960(1): 87-88.

[2] BARNETT. Leverrier's Algorithm for Orthogonal Polynomial Bases[M]. L A A, 1996. 236, 245-263.

[3] SZEGO G. Orthogonal Polynomials[M]. Amer Math Soc Provindence 3rd ed, 1967.

[4] ABRAMOWITZ M, STEGUN I A. Handbook of Mathematical Functions[M]. Dover, New York, 1965.

[5] SNEDDON I N. Special Function of Mathematical Physics and Chemistry (2nd ed)[M]. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1961.

[6] LEWIS F L. Further remarks on the Cayley—Hamilton theorem and Leverrier's method for the matrix pencil (sE-A)[M]. IEEE Trans Automat Control AC-31, 1986. 869-870.

[7] MERTZIOS B G. Leverrier's algorithm for singular systems[M]. IEEE Tans Automat Control AC-29, 1984. 652-653.

[8] WANG G, LIN Y. A New Extension of Leverrier Algorithm[M]. Linear Algebra Appl., 1993. 180, 227-238.

Leverrier-Hermite Algorithm for Singular Pencils

WANG Guo-rong[1], QIU Lin[2], GAO Jing[3]

(1. College of Mathematical Sciences, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China; 2. Nagoya University, Japan; 3. Shanghai College of Applied Technology, Shanghai 200233, China)

Abstract: Leverrier-Hermite algorithm is presented for simultaneous computations of the adjoint $B(\mu)$ and the determinant $a(\mu)$ of the singular pencil $\mu E-A$, where E is singular, but $\det(\mu E-A)\not\equiv 0$. The problem arises in singular linear control problems[6-7]. $B(\mu)$ and $a(\mu)$ can be expressed as a basis of Hermite orthogonal polynomial and the open problem by BARNETT S[2].

Key words: singular pencil; adjoint; determinant; Hermite Orthogonal polynomial