关于 $L^p[0,1]$ 和一类奥尔里奇空间上的测度

吴 良 森

§1 引　　言

$L^p[0,1]$ 上柱状集测度可列可加的充分条件已由沈海玉同志在他的文章[2]中讨论了。在§2—§3 中进一步对 $L^p[0,1]$ 和一类奥尔里奇空间中的测度作了一些粗浅的探讨，在§2 中以 $L^p[0,1]$ 中的矩量问题作为工具给出了[1]中定理另一个较简洁的证明，在§3 中得到了一类奥尔里奇空间中柱状集测度可列可加的充分条件。

§2 $L^p[0,1]$ 上测度的可列可加性

在本节中以 $L^p[0,1]$ 中的矩量问题为工具讨论了 $L^p[0,1]$ 上的测度可列可加性问题。

定理 1 设 $K(t,s)$ 是 $\begin{pmatrix}0\leqslant t\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant 1\end{pmatrix}$ 上的可测函数，并且 s 固定时关于 t 是 p 次可积函数，

$$\int_0^1\left\{\int_0^1|K(t,s)|^p dt\right\}^{\frac{p'}{p}}ds<+\infty$$

$$(2<p<+\infty,\ p\neq\text{正整数},\ 1\leqslant p'<[p])$$

在 $L^q[0,1]$ 中取稠密子集 $E\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，$E$ 是由所有形为 $\sum_{k=0}^{2^n}C_k^{(2^n)}x^k(1-x)^{2^n-k}$ 的多项式所组成 $\left(C_k^{(2^n)}\text{ 为任意常数 } \begin{matrix}k=0,1,2,\cdots\cdots,2^n\\ n=1,2,\cdots\cdots\end{matrix}\right)$；在 E 中定义范数

$$\|\varphi\|=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1K(t,s)\varphi(t)dt\right|^{p'}ds\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

则 $L^p[0,1]$ 中任一柱状集测度若关于范数 $\|\varphi\|$ 连续，一定在 $L^p[0,1]$ 上可列可加。

引理 1.1 设 $\varphi(x)\in L^p[0,1]$ 则使一组数 $\{\mu_n\}$ 有 $\mu_n=\int_0^1x^n\varphi(x)dx$ 成立的充要条件是存在常数 c 使

$$(n+1)^{\frac{p}{q}}\sum_{k=0}^{n}[c_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k|]^p\leqslant C$$

对一切 n 成立，其中

$$\Delta^{n-k}\mu_k=\int_0^1x^k(1-x)^{n-k}\varphi(x)dx\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)。$$

证明　必要性　若 $\varphi(x)\in L^p[0,1]$ 使 $\mu_n=\int_0^1x^n\varphi(x)\,dx$ 成立由 Hölder 不等式

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$|\Delta^{n-k}\mu_k| = \left|\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\varphi(x)dx\right|$$

$$\leqslant\left[\int_0^1 (x^k(1-x)^{n-k})^{\frac{1}{q}}(x^k(1-x)^{n-k})^{\frac{1}{p}}|\varphi(x)|dx\right]$$

$$\leqslant\left(\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\right)^{\frac{1}{q}}\left\{\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}|\varphi(x)|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

因为 $$|\Delta^{n-k}\mu_k|^p\leqslant\left(\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx\right)^{\frac{p}{q}}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}|\varphi(x)|^p dx$$

$$\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx=\frac{1}{(n+1)C_n^k}$$

所以 $$(n+1)^{\frac{p}{q}}(C_n^k)^{\frac{p}{q}}|\Delta^{n-k}\mu_k|^p\leqslant\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}|\varphi(x)|^p dx$$

因为 $$1+\frac{p}{q}=p$$

所以 $$(n+1)^{\frac{p}{q}}\sum[C_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k]^p\leqslant\int_0^1|\varphi(t)|^p dt=C$$

充分性 若有常数C使，

$$(n+1)^{\frac{p}{q}}\sum_{k=0}^n[C_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k|]^p\leqslant C$$

则

$$(n+1)^p\frac{\sum\limits_{k=0}^n[C_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k|]^p}{n+1}\leqslant C$$

由幂平均不等式有

$$\frac{\sum[C_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k|]}{n+1}\leqslant\sqrt[p]{\frac{\sum[C_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k|]^p}{n+1}}$$

所以 $$\sum_{k=0}^n[C_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k|]\leqslant C^{\frac{1}{p}}$$

所以由 Hausdoff 定理(见[2])有 $g(x)\in V[0,1]$ 使

$$\int_0^1 x^k d\,g(x)=\mu_k$$

对任何 $f(x)\in C[0,1]$ 作伯恩斯坦多项式

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\int_0^1 B_n(x)dx=\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k\Delta^{n-k}\mu_k$$

所以 $$\left|\int_0^1 B_n(x)dg(x)\right|\leqslant\left\{\sum_{k=0}^n\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\{\sum[C_n^k|\Delta^{n-k}\mu_k|]^p\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left[\sum_{k=0}^n\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\sqrt[p]{C}(n+1)^{-\frac{1}{q}}$$

令 $n\to\infty$ 有 $$\left|\int_0^1 f(x)dg(x)\right|\leqslant\sqrt[p]{C}\left\{\int_0^1|f(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

即 $$\left|\int_0^1 f(x)dg(x)\right| \leqslant \sqrt[p]{C}\left\{\int_0^1 |f(x)|^q dx\right\}^{\frac{1}{q}}$$

由于连续函数全体在 $L^q[0,1]$ 中稠密，因此 $\int_0^1 f(x)dg(x)$ 可扩充成为 $L^q[0,1]$ 上的线性有界泛函，其形式为

$$\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx \qquad \varphi(x)\in L^p]0,1]$$

因此 $$\int_0^1 x^n\varphi(x)dx = \mu_n = \int_0^1 x^n dg(x)$$ 证完。

引理 1.2 设 $X(t,\omega)$ 为测度空间 (Ω,B,p) 上的随机过程 $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 设

$$\varphi_n(x,\omega) = \sum_{k=0}^{2^n} 2^n C_{2^n}^k \delta_k^{(2^n)} \eta_k^{(2^n)}(\omega)$$

这里 $\delta_k^{(2^n)} = x^k(1-x)^{2^n-k}$

$$\eta_k^{(2^n)}(\omega) = X(t_{k+1}^{(2^n)},\omega) - X(t_k^{(2^n)},\omega) \qquad \left(t_k^{(2^n)} = \frac{k}{2^n}\right)$$

而且 $$\|\varphi_n(x,\omega) - \varphi_m(x,\omega)\| \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$$ 几乎处处成立。

则测度集中在 X 上，X 是使

$$\sum_{k=0}^{2^n} 2^n C_{2^n}^k f(\delta_k^{(2^n)})\eta_k^{(2^n)}(\omega)$$

有子叙列按概率收敛的线性泛函全体。

证明 与[3]中证明相同，故略去。

定理 1 的证明 取 $X(t,\omega)$ 为平稳的独立增量过程，对应的特征函数为

$$\Phi(t) = \exp q(t)$$

$$q(t) = a\left\{\int_0^1 \frac{\cos tu - 1}{u^2}du + \int_1^\infty \frac{\cos tu - 1}{u^{p+1}}du\right\}$$

由[1]中可证明对应的分布密度在无穷远处的渐近阶数为

$$\frac{Ca}{|x|^{p+1}} \qquad C\text{为常数。}$$

设 $$I_{m,n} = \int\left\|\sum_{k=0}^{2^n} 2^n c_{2^n}^k \delta_k^{(2^n)}\eta_k^{(2^n)}(\omega) - \sum_{k=0}^{2^m} 2^m c_{2^m}^k \delta_k^{(2^m)}\eta_k^{(2^m)}(\omega)\right\| dp(\omega)$$

由[2]可以证明 $$I_{m,n} \leqslant C\left\{\int_0^1 \left(\frac{1}{2^m}\sum_{\nu=0}^{2^m} |a_\nu(s)|^p\right)^{\frac{p'}{p}} ds\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

$$|a_\nu(s)| = |2^m c_{2^m}^\nu \Delta^{2^m-\nu}\mu_\nu(s) - 2^n c_{2^n}^{\nu'} \Delta^{2^n-\nu'}\mu_{\nu'}(s)|$$

$$\left(\text{最后一式中} \qquad \nu' = \left[\frac{\nu-1}{2^{m-n}} + 1\right]\right)$$

$$\Delta^{2^m-\nu}\mu_\nu(s) = \int_0^1 x^\nu(1-x)^{2^m-\nu}K(t,s)dt$$

因为 $K(t,s)\in L^p[0,1]$（s 固定时）由引理 1.1 存在常数 C 使

$$\frac{1}{2^m}\sum_{\nu=0}^{2^m}[2^m c_{2^m}^\nu |\Delta^{2^m-\nu}\mu_\nu(s)|]^p < C$$

对一切 m 成立，不难证明可选取子叙列 m_k 使

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{1}{2^{m_k}}\sum_{\nu=0}^{2m_k}|2^{m_k}c_{2^{m_k}}^{\nu}\Delta^{2^{m_k}-\nu}\mu_{\nu}(s)-2^{n_k}c_{2^{n_k}}^{\nu'}\Delta^{2^{n_k}-\nu'}\mu_{\nu'}(s)|^p\to 0$$

不失一般性，设选出的子叙列就是叙列本身。因为上式左端$\frac{p'}{p}$次可积 $\therefore$ $I_{m,n}\to 0$

由引理 1,2 测度集中在 X 上，而 X 是使

$$\sum_{k=0}^{2m}2^m c_{2m}^k(\delta_k^{(2m)})\eta_k^{(2m)}$$

有子叙列概收敛的线性泛函全体，即

$$\left|\sum_{k=0}^{2m}2^m c_{2m}^k f(\delta_k^{(2m)})\eta_k^{(2m)}-\sum_{k=0}^{2n}2^n c_{2n}^k f(\delta_k^{(2n)})\eta_k^{(2n)}\right|\xrightarrow{P}0$$

的线性泛函全体。(P 表示概率意义下的收敛)

由 Колмогоров 定理和分布在无穷远的密度的阶数可知即为使

$$\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2m}[2^m c_{2m}^k\Delta^{2^m-k}\mu_k-2^n c_{2n}^{k'}\Delta^{2^n-k'}\mu_{k'}]^p\to 0$$

的线性泛函全体。所以即为存在常数C使

$$\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2m}[2^m c_{2m}^k|\Delta^{2m-k}\mu_k|]^p<C$$

对一切m成立的线性泛函全体。

因此
$$\sum_{k=0}^{2m}[c_{2m}^k|\Delta^{2m-k}\mu_k|]^p<C$$

由引理 1.1 有 $\varphi(x)\in L^p[0,1]$ 使

$$f(x^n)=\int_0^1 x^n\varphi(x)dx\quad 对一切 n 成立$$

因此 X 对应 $L^p[0,1]$ 中的子空间。

所以关于范数连续的柱状集测度一定在 $L^p[0,1]$ 上可列可加。

定理证完。

§3 一类奥尔里奇空间上柱状集测度可列可加的充分条件

下面关于奥尔里奇空间的定义和性质可在[4]中找到。

定义 1 函数 $M(u)$ 称为是 N-函数，如果它能表示为

$$M(u)=\int_0^{|u|}p(t)dt$$

其中 $p(t)$ 当 $t>0$ 时为正的，又当 $t\geqslant 0$ 时是右连续的非减函数并且满足条件，

$$p(0)=0,\quad p(\infty)=\lim_{t\to\infty}p(t)=\infty。$$

定义 2 设 $M(u)$ 是上边所定义的 N-函数，空间 $L_M[0,1]$ 是由所有使

$$\int_0^1 M(u(x))dx<\infty$$

的可测函数 $u(x)$ 组成。对任何 $u(x)\in L_M[0,1]$，记 $\int_0^1 M(u(x))dx$ 为 $\rho(u,M)$。

定义 3 设 $M(u)$ 和 $N(v)$ 是互余的 N-函数，$L_M^*[0,1]$ 是由这样的 $u(x)$ 所组成，它对

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

一切 $v(x)\in L_N[0,1]$ 使

$$(u,v)=\int_0^1 u(x)v(x)dx<+\infty$$

在 $L_M^*[0,1]$ 中定义范数

$$\|u\|_M=\sup_{\rho(v,N)\le 1}\left|\int u(x)v(x)dx\right|$$

上述范数称为是奥尔里奇范数，$L_M^*[0,1]$ 中赋以上述范数之后称为是与 $M(u)$ 相应的奥尔里奇空间。

引理 2.1 设 $M(u)(-\infty<u<+\infty)$ 是偶的 N-函数

$$M(0)=0,\qquad \lim_{u\to\infty}\frac{M(u)}{u}=\infty$$

$f(t)$ 是使 $\int_0^1 M[f(t)]dt<\infty$ 的函数，为了使 $F(x)$ 可表示为

$$F(x)=c+\int_0^x f(t)dt$$

的充要条件为：对于〔0,1〕中任意分划

$$0=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_n=1$$

作和

$$\sum_{i=1}^n M\left(\frac{\Delta F(x_i)}{\Delta x_i}\right)\Delta x_i$$

与之对应，如此所得的数集是有界的（Ю. T. 梅德维捷夫见〔4〕）

引理 2.2 设 $\Phi(t)=\exp q(t)$

$$q(t)=a\left(\int_0^1\frac{\cos tu-1}{u^2}du+\int_1^\infty\frac{\cos tu-1}{u^{p+1}}(\ln u)^n du\right)$$

以 $\Phi(t)$ 为特征函数的无穷可分过程的密度函数 $\alpha_1(x)$ 具有下列形式的渐近阶数：

$$\alpha_1(x)\sim\frac{Ca}{x^{p+1}}\ln^n x\qquad(x\to\infty)$$

其中 C 为一正常数与 a 无关。

证明 记 $l=[p]$（$[x]$ 表示 x 的整数部份），注意到 $q^{(2k+1)}(0)=0\left(k=1,2,\cdots\cdots,\left[\frac{l}{2}-1\right]\right)$ 对下边的积分进行 l 次分部积分，可以有

$$\begin{aligned}\alpha_1(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos tx e^{q(t)}dt\\&=\frac{1}{\pi x}\int_0^\infty\cos\left(tx+\frac{\pi}{2}\right)e^{q(t)}q'(t)dt\\&=\frac{1}{\pi x^2}\int_0^\infty\cos\left(tx+\frac{2\pi}{2}\right)e^{q(t)}[q''+q'^2]dt\\&=\cdots\cdots\\&=\frac{1}{\pi x^l}\int_0^\infty\cos\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)e^{q(t)}\left[\sum_{p_1+\cdots+p_l=l}d_{p_1p_2\cdots p_l}q^{(p_1)}(t)\cdots\cdots q^{(p_l)}(t)\right]dt\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $d_{p_1\cdots\cdots p_l}$ 为正的常数，其最大值只与 l 有关。

$$\begin{aligned}\alpha_1(x)=&\frac{c}{x^l}\left(1+\frac{c'}{x}+\frac{c''}{x^2}\right)\int_0^\infty\cos\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)e^{q(t)}q_2^{(l)}(t)dt\\&+\frac{c}{x^{l+2}}\int_0^\infty\cos\left(tx+\frac{(l+2)\pi}{2}\right)e^{q(t)}p_2(t)dt\end{aligned}\tag{2}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 $p_2(t)$ 是分部积分过程中所出现的不含有 $q_2^{(l)}(t)$ 的项。

由含参量积分求导法有

$$q_2^{(l)}(t)=a\int_0^\infty \frac{\cos\left(tu+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}}{u^{p-l+1}}\ln^n u\,du$$

$$-a\int_0^1 \frac{\cos\left(tu+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}}{u^{p-l+1}}\ln^n u du+a\cos\frac{l\pi}{2}\int_1^\infty \frac{\ln^n u}{u^{p-l+1}}du$$

对积分

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}}{u^{p-l+1}}\ln^n u\,du$$

作变量变换 $v=tu$ 有

$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(tu+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}}{u^{p-l+1}}\ln^n u\,du$$

$$=t^{p-l}\int_0^\infty \frac{\cos\left(v+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}}{v^{p-l+1}}(\ln v-\ln t)^n dv$$

$$=\sum_{k=0}^n c_n^k(-1)^k(\ln t)^k t^{p-l}\int_0^\infty \frac{\cos\left(v+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}}{v^{p-l+1}}(\ln v)^{n-k}dv$$

因此
$$q_2^{(l)}(t)=\sum_{k=0}^n c_n^k(-1)^k(\ln t)^k t^{p-l}a_k+Q(t) \tag{3}$$

$$Q(t)=Ca\int_0^1 \frac{\cos\left(tu+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}}{u^{p-l+1}}(\ln u)^n du+Ca$$

这里 c 在不同的情况下可以代表不相同的常数。

把(3)代入(2)有

$$\alpha_1(x)=\sum_{k=0}^n a_k c_n^k\left(\frac{c}{x^l}+\frac{c'}{x^{l+1}}+\frac{c''}{x^{l+2}}\right)a\int_0^\infty(-1)^k t^{p-l}(\ln t)^k e^{q(t)}\cos\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)dt$$

$$+\frac{c}{x^{l+2}}\int_0^\infty\cos\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)e^{q(t)}P_2(t)dt$$

$$+\left(\frac{c}{x^l}+\frac{c'}{x^{l+1}}+\frac{c''}{x^{l+2}}\right)\int_0^\infty Q(t)dt \tag{4}$$

假若可以证明 $\int_0^\infty\cos\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)e^{q(t)}t^{p-l-1}(\ln t)^n dt\sim\frac{c}{x^{p+1-l}}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n$ 的话，就可以证明引理中的结论。

$$\int_0^\infty\sin\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)e^{q(t)}t^{q-l-1}(\ln t)^n dt$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{q(t)}\left[\cos\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}\right](q'(t)t^{p-l-1}(\ln t)^n$$

$$+(p-l-1)t^{p-l-2}(\ln t)^n+nt^{p-l-2}(\ln t)^{n-1}]dt \tag{5}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

只需证明

$$\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{q(t)}t^{p-l-2}(\ln t)^n\left(\cos\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}\right)dt\sim\frac{C}{x^{p-l}}(\ln x)^n \quad 即可 \tag{6}$$

在(6)中设 $t=\frac{y}{x}$，有

$$\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{q(t)}\left[t^{p-l-2}(\ln t)^n\left[\cos\left(tx+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}\right]dt\right.$$

$$=\frac{1}{x^{p-l}}\int_0^\infty e^{q\left(\frac{y}{x}\right)}y^{p-l-2}\sum_{k=0}^n(-1)^k(\ln x)^k(\ln y)^{n-k}\left[\cos\left(y+\frac{l\pi}{2}\right)-\cos\frac{l\pi}{2}\right]dy$$

$$\sim\frac{c}{x^{p-l}}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^n$$

与前结合有 $$\alpha_1(x)\sim C\frac{1}{x^{p+1}}(\ln x)^n。$$

引理 2.3 设 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 为常数，$-1<q<0$，$l=[p]$，记 $\beta(x)$ 是一无穷可分过程的密度函数，其特征函数为

$$\Phi(t)=\exp q(t)$$

$$q(t)=a\left\{\int_0^1\frac{\cos tu-1}{u^2}du+\int_1^\infty\frac{\cos tu-1}{u^{p+1}}(\ln u)^n du\right\}$$

a 为大于 0 的常数，则

$$J(q)=\int\cdots\int\left|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right|^q\left(\ln\left|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right|\right)^n\beta(x_1)\cdots\beta(x_n)dx_1,\cdots dx_n$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{s^{q+1}}e^{\sum_{i=1}^n q(a_i s)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left(\ln\frac{u}{s}\right)^n u^q\cos u\,du\right]ds。$$

引理 2.4 $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(\ln u)^k u^q\cos u\,du$ 不仅当 $-1<\mathrm{Re}(q)<0$ 时有意义，并且当 $-1<\mathrm{Re}(q)<l=[p]$，$q\neq$ 正整数时同样有意义。

引理 2.5 $J_1(q)=\int_0^\infty(\ln s)^k\frac{1}{s^{q+1}}e^{\sum_{i=1}^n q(|a_i|s)}ds$ 不仅当 $-1<\mathrm{Re}(q)<0$ 有意义，并且在 $-1<\mathrm{Re}(q)<l=[p]$ 时也有意义。[$q\neq$ 正整数]

上述几个引理用分部积分和解析延拓的方法证明，由于与[2]中同故略去。

设 $$M_p(u)=\begin{cases}\frac{u^p}{p}(\ln u)^n-\frac{n}{p}e^{p-1}u+\frac{n}{p}e^p, & u>e,\\ \frac{u^p}{p}, & 0\leqslant u\leqslant e,\end{cases}$$

$L^*_{M(p)}[0,1]$ 为相应于上述 N-函数的奥尔里奇空间，$\|\cdot\|_{M(p)}$ 为相应的范数，则有下述定理：

定理 2 设 $K(t,s)$ 为 $\begin{pmatrix}0\leqslant t\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant 1\end{pmatrix}$ 上的二元函数，当 s 固定时，$K(t,s)\in L^*_{M(p)}[0.1]$

$$g(s)=\|K(t,s)\|_{M(p)}\in L^*_{M(q)}[0,1]$$

$$(2<p<\infty,\qquad 1\leqslant q<[p])。$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

又设 $\Phi=\{\varphi'(t),\ \varphi(t)\in E\}$，若在 Φ 上定义范数

$$\|\psi\|=\left\|\int_0^1 K(t,s)\psi(t)dt\right\|_{M(q)}$$

则 $L^*_{M(p)}[0.1]$ 上的柱状集测度若关于 $\|\varphi\|$ 连续一定可列可加。

$$（E \text{ 是形为 } \varphi(t)=\sum_{\nu=1}^{2^n} c_\nu^{(n)} e_\nu^{(n)}(t) \qquad (n=1,2,\cdots\cdots)$$

的函数组合，$t_\nu^{(n)}=\frac{\nu}{2^n}$，

$$e_\nu^{(n)}(t)=\begin{cases}1, & t_\nu^{(n)}\leqslant t\leqslant 1,\\ \dfrac{t-t_{\nu-1}^{(n)}}{t_\nu^{(n)}-t_{\nu-1}^{(n)}}, & t_{\nu-1}^{(n)}\leqslant t<t_\nu^{(n)},\\ 0, & 0\leqslant t<t_{\nu-1}^{(n)},\end{cases}$$

$C_k^{(n)}$ 为任意常数）

证明 设 $\{X(t,\omega),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 为 (Ω,B,p) 上具有独立增量的平稳过程，$X(0,\omega)=0$，$X_\sigma-X_\tau$ 的特征函数为引理 2 中的 $e^{(\sigma-\tau)q(t)}$，设 $\eta_\nu^{(n)}(\omega)=X(t_\nu^{(n)},\omega)-X(t_{\nu-1}^{(n)},\omega)$。

应用 $$\|u\|_M\leqslant\rho(u,M)$$

$$\left\|\sum_{\nu=1}^{2^n}\eta_\nu^{(m)}(\omega)e_\nu^{(m)}-\sum_{\nu=1}^{2^m}\eta_\nu^{(n)}(\omega)e_\nu^{(n)}\right\|_{M(q)}$$

$$\leqslant\frac{1}{q}\left|\int_0^1\left(\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{2^m}(2^m\eta_\nu^{(m)}(\omega)-2^n\eta_{\nu'}^{(n)}(\omega))\int_{t_{\nu-1}^{(m)}}^{t_\nu^{(m)}}K(t,s)dt\right|^q}{\ln^{-1}\left|\sum\limits_{\nu=1}^{2^m}(2^m\eta_\nu^{(m)}(\omega)-2^n\eta_{\nu'}^{(m)}(\omega))\int_{t_{\nu-1}^{(m)}}^{t_\nu^{(m)}}K(t,s)dt\right|}\right)ds\right.$$

$$+\frac{1}{q}\left|\int_0^1\left(\left|\sum_{\nu=1}^{2^m}(2^m\eta_\nu^{(m)}(\omega)-2^n\eta_{\nu'}^{(n)}(\omega))\int_{t_{\nu-1}^{(m)}}^{t_\nu^{(m)}}K(t,s)\,dt\right|^q\right)ds\right.$$

$$+\frac{c}{q}\left|\int_0^1\left(\left|\sum_{\nu=1}^{2^m}(2^m\eta_\nu^{(m)}(\omega)-2^n\eta_{\nu'}^{(n)}(\omega))\int_{t_{\nu-1}^{(m)}}^{t_\nu^{(m)}}K(t,s)\,dt\right|\right)ds\right|$$

$$=I_1+I_2+I_3 \qquad \left(\text{上边}\quad \nu'=\left[\frac{\nu-1}{2^{m-n}}+1\right]\right.$$

I_2 和 I_3 由〔2〕中可知当 $\begin{matrix}m\to\infty\\ n\to\infty\end{matrix}$ 时趋向于 0，因此主要是证明 I_1 趋向于 0。

设 $$K_\nu^{(m)}=K_\nu^{(m)}(s)=\int_{t_{\nu-1}^{(m)}}^{t_\nu^{(m)}}K(t,s)dt$$

$$a_\nu=a_\nu^{m,n}(s)=2^n\sum_{\mu=2^{m-n}(\nu'-1)+1}^{2^{m-n}\nu'}(K_\mu^{(m)}-K_\nu^{(m)})$$

则

$$I_1=\frac{1}{q}\left|\int_0^1\frac{\left|\sum\limits_{\nu=1}^{2^m}(2^m\eta_\nu^{(m)}(\omega)-2^n\eta_{\nu'}^{(n)}(\omega))K_\nu^{(m)}\right|^q}{\ln^{-n}\left|\sum\limits_{\nu=1}^{2^m}(2^m\eta_\nu^{(m)}(\omega)-2^n\eta_{\nu'}^{(n)}(\omega))K_\nu^{(m)}\right|}ds\right|$$

$$=\frac{1}{q}\left|\int_0^1\left|\sum_{\nu=1}^{2^m}a_\nu\eta_\nu^{(m)}(\omega)\right|^q\ln^n\left|\sum_{\nu=1}^{2^m}a_\nu\eta_\nu^{(m)}(\omega)\right|ds\right|$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由引理 2.3

$$J(q)=\int\cdots\cdots\int\left|\sum_{i=1}^{2m}a_ix_i\right|^q\ln^n\left|\sum_{i=1}^{2m}a_ix_i\right|\beta(x_1)\beta(x_2)\cdots\beta(x_{2m})dx_1\cdots dx_{2m}$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{s^{q+1}}e^{\sum_{i=1}^{2m}q(|a_i|s)}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\left(\ln\frac{u}{s}\right)^n\cos u du\right]ds$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty(\ln u)^{n-k}\cos u du\right)\int_0^\infty\frac{(\ln s)^k}{s^{q+1}}e^{\sum_{i=1}^{2m}q(|a_i|s)}ds$$

若可证明 $$\int_0^\infty\frac{(\ln s)^k}{s^{q+1}}e^{\sum_{i=1}^{2m}q(|a_i|s)}ds\to0\qquad(k=0,1,2,\cdots\cdots,n)$$

则有 $$I_{m,n}=\int\left\|\sum_{\nu=1}^{2m}\eta_\nu^{(m)}(\omega)e_\nu^{(m)}-\sum_{\nu=1}^{2n}\eta_\nu^{(n)}(\omega)e_\nu^{(n)}(\omega)\right\|dP(\omega)$$

$$\leqslant\int(I_1+I_2+I_3)dP(\omega)\to0$$

由此即有定理的结论。

现在用下边的引理完成定理的证明。

引理 2.6 $$J_1(q)=\int_0^\infty\frac{(\ln s)^k}{s^{q+1}}e^{\sum_{i=1}^{2m}q(|a_i|s)}ds$$

当 $\begin{matrix}m\to\infty\\n\to\infty\end{matrix}$ 时是趋向于零的。

引理证明 由引理 2.5 可知，$J_1(q)$ 不仅当 $-1<\mathrm{Re}(q)<0$ 时有意义，并且当 $-1<\mathrm{Re}(q)<l=[p]$，$q\neq$正整数时也有意义。

若记 $v(t,s)=\int_0^tK(\xi,s)d\xi$，则对任一组分点 $0=t_0<t_1<\cdots\cdots<t_n=1$ 由引理 2.1 有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|v(t_i,s)-v(t_{i-1},s)|^p}{|t_i-t_{i-1}|^{p-1}}\ln^n\left(\frac{v(t_i,s)-v(t_{i-1},s)}{t_i-t_{i-1}}\right)\leqslant K(s)$$

当取 $t_\gamma^{(n)}$ 为分点时，必有 $\{K_n\}$ 使

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{2^{K_m}}\sum_{\nu=1}^{2^{K_m}}\left|\frac{v(t_\nu^{(K_m)},s)-v(t_{\nu-1}^{(K_m)},s)}{t_\nu^{(K_m)}-t_{\nu-1}^{(K_m)}}-\frac{v(t_{\nu'}^{(K_n)},s)-v(t_{\nu'-1}^{(K_n)},s)}{t_{\nu'}^{(K_n)}-t_{\nu'-1}^{(K_n)}}\right|^p$$

$$\times\ln\left|\frac{v(t_\nu^{(K_m)},s)-v(t_{\nu-1}^{(K_m)},s)}{t_\nu^{(K_m)}-t_{\nu-1}^{(K_m)}}-\frac{v(t_{\nu'}^{(K_n)},s)-v(t_{\nu'-1}^{(K_n)},s)}{t_{\nu'}^{(K_n)}-t_{\nu'-1}^{(K_n)}}\right|=0$$

即 $$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{2^{k_m}}\sum_{\nu=1}^{2^{K_m}}|a_\nu^{k_m,k_n}(s)|^p\ln^n|a_\nu^{k_m,k_n}(s)|=0$$

显然由上可推出

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\m\to\infty}}\frac{1}{2^{k_m}}\sum_{\nu=1}^{2^{K_m}}|a_\nu^{k_m,k_n}(s)|^p=0$$

这时用数学归纳法可以证明

$$\int_0^\infty\ln^ks\frac{1}{s^{q+1}}e^{\sum_{i=1}^{2m}q(|a_i|s)}ds=\sum_{l=1}^{k}C_l\int_0^\infty(\ln s)^l\frac{1}{s^{q-l+1}}\left(\frac{d}{ds}\right)^le^{\sum_{i=1}^{2m}q(|a_i|s)}ds$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

设 $h_r = h_r(s) = \frac{1}{2^m}\sum_{\nu=1}^{2^m} |a_\nu(s)|^r$　　　由于　$e^{q(t)} \leqslant C' e^{-ct}$　$(C, C' > 0)$

所以
$$e^{\psi(t,s)} = e^{\sum_{i=1}^{2^m} q(|a_i|s)} \leqslant C' e^{-\frac{C}{2^m}\sum_{\nu=1}^{2^m}|a_\nu(s)|s}$$

所以
$$\int_0^\infty (\ln s)^k \frac{1}{s^{q-l+1}}\left(\frac{d}{ds}\right)^l e^{\sum_{i=1}^{2^m} q(|a_i|s)} ds \leqslant C h_l \int_0^\infty \ln^k s \frac{1}{s^{q-l+1}} e^{-Ch_1 s} ds$$
$$= \frac{C h_l}{h_1^{l-q}} \int_0^\infty \frac{(-\ln h_1 + \ln t)^k}{t^{q-l+1}} e^{-ct} dt$$
$$= \sum_{k'=0}^{k} \frac{c h_l}{h_1^{l-q}} (-1)^{k'} (\ln h_1)^{k'} \int_0^\infty \frac{(\ln t)^{n-k'}}{t^{q-l+1}} e^{-ct} dt$$

因此只要证明 $\frac{h_l}{h_1^{l-q}} \ln^k h_1 \to 0$ 即可。

因为 $p\frac{l-1}{p-1} < l$，可取 q 使 $p\frac{l-1}{p-1} < q < l$，$l-1 < q < l$，取 $\varepsilon > 0$ 使 $p\frac{l-1}{p-1} < q - \varepsilon < l$
由 Hölder 不等式有
$$h_l \leqslant \left(\frac{1}{2^m}\sum_{\nu=1}^{2^m} |a_\nu|\right)^{l-q+\varepsilon} \left(\frac{1}{2^m}\sum_{\nu=1}^{2^m} |a_\nu|^{\frac{q-\varepsilon}{1-(l-q+\varepsilon)}}\right)^{1-(l-q+\varepsilon)} = h_1^{l-q+\varepsilon} h^{1-(l-q+\varepsilon)}_{(q-\varepsilon)/1-(l-q+\varepsilon)}$$
$$\therefore \quad \frac{h_l}{h_1^{l-q}} (|\ln h_1|)^k \leqslant h^{1-(l-q+\varepsilon)}_{(q-\varepsilon)/1-(l-q+\varepsilon)} \cdot h_1^{\varepsilon} (|\ln h_1|)^k$$
$$\because \quad \frac{q-\varepsilon}{1-(l-q+\varepsilon)} < p \qquad \therefore \quad h^{1-(l-q+\varepsilon)}_{(q-\varepsilon)/1-(l-q+\varepsilon)} \leqslant h_p^{\frac{q-\varepsilon}{p}}$$
$$\therefore \quad \frac{h_l}{h_1^{l-q}} (|\ln h_1|)^k \leqslant h_p^{\frac{q-\varepsilon}{p}} h_1^{\varepsilon} \cdot (|\ln h_1|)^k$$
$$\therefore \quad \frac{h_l}{h_1^{l-q}} (|\ln h_1|)^k \to 0$$

引理证完。

现在考察使 $\sum_{\nu=1}^{2^n} \eta_\nu^{(m)}(\omega) f(e_\nu^{(n)})$ 有子叙到概收敛的线性泛函全体，根据 Колмогоров 定理，上述条件等价于
$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{2^{jm}} \sum_{\nu=1}^{2^{jm}} \left| \frac{u(t_{\nu'}^{(jn)}) - u(t_{\nu'-1}^{(jn)})}{t_{\nu'}^{(jn)} - t_{\nu'-1}^{(jn)}} - \frac{u(t_\nu^{(jm)}) - u(t_{\nu-1}^{(jm)})}{t_\nu^{(jm)} - t_{\nu-1}^{(jm)}} \right|^p$$
$$\times \ln^n \left| \frac{1}{\frac{u(t_{\nu'}^{(jn)}) - u(t_{\nu'-1}^{(jn)})}{t_{\nu'}^{(jn)} - t_{\nu'-1}^{(jn)}} - \frac{u(t_\nu^{(jm)}) - u(t_{\nu-1}^{(jm)})}{t_\nu^{(jm)} - t_{\nu-1}^{(jm)}}} \right| = 0$$

$\left(\text{其中} \quad u(0) = 0, \quad u(t_\nu^{(n)}) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{\nu} f(e_k^{(n)}) \quad \begin{matrix} \nu = 1, 2, \cdots, 2^n \\ n = 1, 2, \cdots, \cdots \end{matrix}\right)$

于是有常数 K 使
$$\frac{1}{2^{jm}} \sum_{\nu=1}^{2^{jm}} \left| \frac{u(t_\nu^{(jm)}) - u(t_{\nu-1}^{(jm)})}{t_\nu^{(jm)} - t_{\nu-1}^{(jm)}} \right|^p \ln^n \left| \frac{1}{\frac{u(t_\nu^{(jm)}) - u(t_{\nu-1}^{(jm)})}{t_\nu^{(jm)} - t_{\nu-1}^{(jm)}}} \right| < K$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由引理 2.1 $$u(t)=\int_0^t \varphi(t)dt, \qquad \varphi(t)\in L^*_{M(p)}[0,1]$$

这样一来，通过映照 $f\xrightarrow{s}u'(t)$ 可以建立 χ 与 $L^*_{M(p)}[0,1]$ 的子空间 $\mathscr{R}$ 之间的一一映照，并且在映照 s 之下，f 和 u' 有如下关系：若 $\varphi(t)=\sum_{\nu=1}^{2^n}x_\nu^{(n)}e_\nu^{(n)}(t)\in E$，则

$$f(\varphi)=\sum_{\nu=1}^{2^n}x_\nu^{(n)}f(e_\nu^{(n)})=\sum_{\nu=1}^{2^n}x_\nu^{(n)}\int_0^1 e_\nu^{(n)\prime}(t)u'(t)dt=(\varphi',u')。$$

设 μ 为 $L^*_{M(p)}[0,1]$ 上的柱状测度，而且对范数 $\|\psi\|$ 连续。作 χ 中的 Borel 柱的集函数 $\hat{\mu}$ 如下：当 $\hat{B}$ 为 χ 中的 Borel 柱，即有 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n\in E$，

$$\hat{B}=\{f|(f(\varphi_1),\cdots,f(\varphi_n))\in B\},\ (B\text{–Borel 集})$$

时，作 $\widetilde{B}=\{v|((\varphi_1',v),\cdots,(\varphi_n',v))\in B\}$，则 $s^{-1}(\widetilde{B}\mathscr{R})=\hat{B}$。定义

$$\hat{\mu}(\hat{B})=\mu\{v|((\varphi_1',v),\cdots,(\varphi_n',v))\in B,\ v\in L^*_{M(p)}[0,1]\}$$

则 $\hat{\mu}$ 为 χ 上的柱状测度。由于 μ 对 $\|\psi\|$ 连续，即对任意正数 $\varepsilon,\eta>0$，有 $\delta>0$，$\psi\in\Phi$，$\|\psi\|<\delta$ 时，$\mu\{v||(\psi,v)|>\eta\}<\varepsilon$，由上边对应可知，$\|\varphi'\|<\delta$ 时，$\hat{\mu}\{f||f(\varphi)|>\eta\}<\varepsilon$。由前边讨论可知 $\hat{\mu}$ 必在 χ 上可列可加的。

现在证明 μ 在 $L^*_{M(p)}[0,1]$ 上为可列可加的。事实上，假设 $L_{M(p)}$ 中有一列 Borel 柱

$$\widetilde{B}_i=\{v|((\psi_{1,i},v),\cdots,(\psi_{i_n,i},v))\in B_i,\ v\in L^*_{M(p)}[0,1]\}$$

(其中 B_i 为 i_n 维空间中的 Borel 集)，

$$\widetilde{B}_1\supset\widetilde{B}_2\supset\cdots\supset\widetilde{B}_n\supset\cdots,$$

而且 $\Pi\widetilde{B}_i=0$，但 $\lim\limits_{i\to\infty}\mu(\widetilde{B}_i)>r>0$。

取 $\varphi_{k,i}\in E$，$\varphi'_{k,i}=\psi_{k,i}$，作

$$\hat{B}_i=\{f|(f(\varphi_{1,i}),\cdots,f(\varphi_{i_n,i}))\in B_i\},$$

则由前所述，

$$\hat{B}_i=s^{-1}(\widetilde{B}_i\mathscr{R}),\quad i=1,2,\cdots,$$

显然 $\hat{B}_1\supset\hat{B}_2\supset\cdots\supset\hat{B}_n\supset\cdots$，而且 $\Pi\widetilde{B}_i=0$，得到 $\Pi\widetilde{B}_i\mathscr{R}=0$，因此 $\Pi\hat{B}_i=\Pi s^{-1}(\widetilde{B}_i\mathscr{R})=0$。因此 $\hat{\mu}$ 在 χ 上为可列可加的，故 $\lim\hat{\mu}(\hat{B}_i)=0$。但这时 $\hat{\mu}(\hat{B}_i)=\mu(\widetilde{B}_i)$，由是知道

$$\lim_{i\to\infty}\mu(\widetilde{B}_i)=0。$$

这样得出矛盾。所以 μ 在 $L^*_{M(p)}[0,1]$ 上必为可列可加。

所以定理证完。

参 考 文 献

〔1〕 夏道行：泛函空间上的测度，复旦学报 1962 年 7 卷 p121–p131

〔2〕 沈海玉：函数空间 $L^p[0,1]$ 上的测度，复旦学报 1963 年 8 卷 2 期 p205–p220

〔3〕 吴良森：$V[0,1]$ 上的测度(未发表)

〔4〕 M·A 克拉斯诺西尔斯基、Я·Б 鲁季斯基：凸函数和奥尔里奇空间（吴从炘译)

〔5〕 那汤松：函数构造论

〔6〕 伊藤清：随机过程

〔7〕 夏道行：无限维空间上的测度和积分(上册)

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

On the Measure in $L^p[0,1]$ and a Sort of Orlicz Space

Wu Liangsuh

Abstract

In this paper we discuss the measure in $L^p[0,1]$ and a sort of Orlicz space and obtain the following conclusions.

[Theorem1] Let $K(x,s)$ be a measurable function on $\begin{pmatrix}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant 1\end{pmatrix}$ and for a fixed s, $K(x,s)\in L^p[0,1]$,

$$\int_0^1\left\{\int_0^1|K(x,s)|^p dx\right\}^{\frac{p'}{p}} ds<\infty$$

$$(2<p<\infty,\ p\neq \text{positive integer},\ 1\leqslant p'<[p])$$

we take a dense subset E in $L^q[0,1]\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, where E consists of all polynomials

$$\sum_{k=0}^{2^n} C_k^{(2^n)} x^k(1-x)^{2^n-k}$$

$$\left(C_k^{(2^n)} \text{ is any constant } \begin{matrix} k=0,1,2,\cdots\cdots,2^n\\ n=1,2,\cdots\cdots\end{matrix}\right)$$

If in E we define the norm

$$\|\varphi\|=\left\{\int_0^1\left|\int_0^1 K(x,s)\varphi(x)dx\right|^{p'} ds\right\}^{\frac{1}{p'}}$$

then any cylinder set measure in $L^p[0,1]$ which is continuous with respect to $\|\varphi\|$ must have countable additivity.

[Theorem 2] Let $K(t,s)$ be measurable function on $\begin{pmatrix}0\leqslant t\leqslant 1\\ 0\leqslant s\leqslant 1\end{pmatrix}$, and for a fixed s, $K(t,s)\in L^*_{M(p)}[0,1]$

$$g(s)=\|K(t,s)\|_{M(p)}\in L^*_{M(q)}[0,1]$$

$$(2<p<\infty,\ p\neq \text{positive integer},\ 1<q<[p])$$

Set $\Phi=\{\varphi'(t),\ \varphi(t)\in \mathrm{E}\}$, If in Φ we define

$$\|\psi\|=\left\|\int_0^1 K(t,s)\psi(t)dt\right\|_{M(q)}$$

then any cylinder set measure in $L^*_{M(p)}[0,1]$ which is continuous with respect to $\|\psi\|$ must have countable additivity.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net