关于高阶 Euler 多项式和高阶 Bernoulli 多项式的计算公式

刘国栋

提　要　给出了能简捷地计算出高阶 Euler 多项式和高阶 Bernoulli 多项式的计算公式.

关键词　Euler 多项式；高阶 Euler 多项式；Bernoulli 多项式；高阶 Bernoulli 多项式；计算公式

中图法分类号　O174

1　前　言

高阶 Euler 多项式和高阶 Bernoulli 多项式是两类特殊函数，它们在函数论和理论物理学中占有重要的地位，有着广泛的应用. 关于高阶 Euler 多项式和高阶 Bernoulli 多项式的计算一直是一个复杂的问题，本文给出了能简捷地计算高阶 Euler 多项式和高阶 Bernoulli 多项式的计算公式，较好地解决了高阶 Euler 多项式和高阶 Bernoulli 多项式的计算问题.

2　定义和引理

定义1　Euler 多项式 $E_v(x)$ 由下列展开式给出

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{v=0}^{\infty}E_v(x)\frac{t^v}{v!},|t|<\pi.$$

定义2　高阶 Euler 多项式 $E_v^{(n)}(x)$ 由下列展开式给出

$$\frac{2^n e^{xt}}{(e^t+1)^n}=\sum_{v=0}^{\infty}E_v^{(n)}(x)\frac{t^v}{v!},|t|<\pi.$$

其中 $n=2,3,4\cdots\cdots$

定义3　Bernoulli 多项式 $B_v(x)$ 由下列展开式给出

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{v=0}^{\infty}B_v(x)\frac{t^v}{v!},|t|<2\pi.$$

收稿日期：1997-03-07

作者刘国栋，男，讲师，惠州大学数学系，广东，516015

定义4 高阶 Bernoulli 多项式 $B_v^{(n)}(x)$ 由下列展开式给出

$$\frac{t^n e^{xt}}{(e^t-1)^n}=\sum_{v=0}^{\infty}B_v^{(n)}(x)\frac{t^v}{v!},|t|<2\pi.$$

其中 $n=2,3,4\cdots\cdots$

定义5 设

$$\delta_{n,1}=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$
$$\delta_{n,2}=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_{n,n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-1}+x_1+\cdots x_{n-2}x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_n$$
$$\delta_{n,n}=x_1x_2\cdots x_n.$$

其中 $\delta_{n,j}(1\leqslant j\leqslant n)$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中每次取 j 个所作的一切可能乘积的和. 称这 n 个多项式 $\delta_{n,1},\delta_{n,2},\cdots,\delta_{n,n}$ 为关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 元初等对称多项式. 另本文规定 $\delta_{n,0}=1$,其中 n 为任意自然数.

引理1 $\delta_{n,n}=x_n\delta_{n-1,n-1}$;$\delta_{n,j}=x_n\delta_{n-1,j-1}+\delta_{n-1,j}(1\leqslant j\leqslant n)$;$\delta_{n,1}=\delta_{n-1,1}+x_n$.

引理2 设 $f(t)=\sum_{v=0}^{\infty}E_v(x)\frac{t^v}{v!},x_i=x+i-1,i=1,2,\cdots,n$.

则

$$\frac{2\cdot(n-1)!}{(e^t+1)^n}=e^{-x_nt}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{n-1,j}(-1)^{n-1-j}f^{(n-1-j)}(t). \qquad (*)$$

其中 $\delta_{n-1,1},\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$ 是关于 $x_1=x,x_2=x+1,\cdots,x_{n-1}=x+n-2$ 的 $n-1$ 元初等对称多项式.

证明

1° 由 $f(t)=\sum_{v=0}^{\infty}E_v(x)\frac{t^v}{v!}=\frac{2e^{xt}}{e^t+1}$ 有 $\frac{\varepsilon}{e^t+1}=e^{-xt}f(t)$,两边对 t 求导得

$$\frac{-2e^t}{(e^t+1)^2}=e^{-xt}(xf(t)-f'(t)),$$

即

$$\frac{2}{(e^t+1)^2}=e^{-(x+1)t}(xf(t)-f'(t)).$$

上式即为(*)式当 $n=2$ 的情形.

2° 假定(*)式对一切自然数 $n-1$ 已经成立,即

$$\frac{2\cdot(n-2)!}{(e^t+1)^{n-1}}=e^{-x_{n-1}t}\sum_{j=0}^{n-2}\delta_{n-2,j}(-1)^{n-2-j}f^{(n-2-j)}(t)$$

成立,上式两边对 t 求导得

$$\frac{-2e^t\cdot(n-1)!}{(e^t+1)^n}=-e^{-x_{n-1}t}\Big[x_{n-1}\sum_{j=0}^{n-2}\delta_{n-2,j}(-1)^{n-2-j}f^{(n-2-j)}(t)-$$
$$\sum_{j=0}^{n-2}\delta_{n-2,j}(-1)^{n-2-j}f^{(n-1-j)}(t)\Big]=-e^{-x_{n-1}t}\Big[x_{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\delta_{n-2,j-1}(-1)^{n-1-j}f^{(n-1-j)}(t)-$$
$$\sum_{j=0}^{n-2}\delta_{n-2,j}(-1)^{n-1-j}f^{(n-1-j)}(t)\Big]=-e^{-x_{n-1}t}\Big[x_{n-1}\delta_{n-2,n-2}f(t)+\sum_{j=1}^{n-2}(x_{n-1}\delta_{n-2,j-1}+$$
$$\delta_{n-2,j})(-1)^{n-1-j}f^{(n-1-j)}(t)+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(t)\Big]=-e^{-x_{n-1}t}\Big[\delta_{n-1,n-1}f(t)+$$

$$\sum_{j=1}^{n-2}\delta_{n-1,j}(-1)^{n-1-j}f^{(n-1-j)}(t)+(-1)^{n-1}f^{(n-1)}(t)]=$$
$$-e^{-x_{n-1}t}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{n-1,j}(-1)^{n-1-j}f^{(n-1-j)}(t).$$

所以有

$$\frac{2\cdot(n-1)!}{(e^t+1)^n}=-e^{-x_nt}[\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{n-1,j}(-1)^{n-1-j}f^{(n-1-j)}(t).$$

上式说明(*)式对自然数 n 也成立,综合1°、2°知引理2为真.

引理3　设

$$g(t)=\sum_{v=1}^{\infty}B_v(x)\frac{t^{v-1}}{v!},x_i=x+i-1,i=1,2,\cdots,n,$$

则

$$\frac{(n-1)!}{(e^t-1)^n}=e^{-x_nt}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{n-1,j}[(n-1-j)!t^{j-n}+(-1)^{n-1-j}g^{(n-1-j)}(t)]\qquad(**)$$

其中 $\delta_{n-1,1},\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$ 是关于 $x_1=x,x_2=x+1,\cdots,x_{n-1}=x+n-2$ 的 $n-1$ 元初等对称多项式.

证明

3°　由 $g(t)=\sum_{v=1}^{\infty}B_v(x)\frac{t^{v-1}}{v!}$ 及 $\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{v=0}^{\infty}B_v(x)\frac{t^v}{v!},|t|<2\pi$　知

当 $0<|t|<2\pi$ 时有 $\frac{1}{e^t-1}=e^{-xt}(g(t)+\frac{1}{t})$,两边对 t 求导得

$$\frac{-e^t}{(e^t-1)^2}=-xe^{-xt}(g(t)+\frac{1}{t})+e^{-xt}(g'(t)-\frac{1}{t^2})$$

即

$$\frac{1}{(e^t-1)^2}=e^{-x_2t}[x(g(t)+\frac{1}{t})-(g'(t)-\frac{1}{t^2})].$$

上式即为(* *)式当 $n=2$ 的情形.

4°　假定(* *)式对一切自然数 $n-1$ 都成立,即

$$\frac{(n-2)!}{(e^t-1)^{n-1}}=e^{-x_{n-1}t}\sum_{j=0}^{n-2}\delta_{n-2,j}[(n-2-j)!t^{j-n+1}+(-1)^{n-2-j}g^{(n-2-j)}(t)]$$

成立.上式两边对 t 求导得

$$\frac{-(n-1)!e^t}{(e^t-1)^n}=-x_{n-1}e^{-x_{n-1}t}\sum_{j=0}^{n-2}\delta_{n-2,j}[(n-2-j)!t^{j-n+1}+(-1)^{n-2-j}g^{(n-2-j)}(t)]=$$
$$-e^{-x_{n-1}t}\sum_{j=0}^{n-2}\delta_{n-2,j}[(n-1-j)!t^{j-n}+(-1)^{n-1-j}g^{(n-1-j)}(t)]=$$
$$-e^{-x_{n-1}t}[x_{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\delta_{n-2,j-1}[(n-1-j)!t^{j-n}+(-1)^{n-1-j}g^{(n-1-j)}(t))+$$
$$\sum_{j=0}^{n-2}\delta_{n-2,j}((n-1-j)!t^{j-n}+(-1)^{n-1-j}g^{(n-1-j)}(t))]=$$
$$-e^{-x_{n-1}t}[x_{n-1}\delta_{n-2,n-2}(t^{-1}+g(t))+(n-1)!t^{-n}+(-1)^{n-1}g^{(n-1)}(t))+$$
$$\sum_{j=1}^{n-2}(x_{n-1}\delta_{n-2,j-1}((n-1-j)!t^{j-n}+(-1)^{n-1-j}g^{(n-1-j)}(t))]=$$

$$-e^{-x_{n-1}t}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{n-1,j}((n-1-j)!t^{j-n}+(-1)^{n-1-j}g^{(n-1-j)}(t)).$$

所以有

$$\frac{(n-1)!}{(e^t-1)^n}=e^{-x_{n-1}t}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{n-1,j}((n-1-j)!t^{j-n}+(-1)^{n-1-j}g^{(n-1-j)}(t)).$$

上式说明(* *)对自然数 n 也成立. 综合3°、4°知引理3为真.

3 主要结论

定理1

$$E_v^{(n)}(x)=\frac{-2^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}E_{v+n-1-j}(x-n+1),$$

其中 $\delta_{n-1,1},\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$是关于 $x-n+1,x-n+2,\cdots,x-1$的 $n-1$元初等对称多项式.

证 由引理2并注意到

$$f^{(n-1-j)}(t)=\sum_{v=0}^{\infty}E_{v+n-1-j}(x)\frac{t^v}{v!},$$

有

$$\frac{(n-1)!}{2^{n-1}}\cdot\frac{2^n e_n^x t}{(e^t+1)^n}=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}\sum_{v=0}^{\infty}E_{v+n-1-j}(x)\frac{t^v}{v!},$$

即

$$\frac{(n-1)!}{2^{n-1}}\sum_{v=0}^{\infty}E_v^{(n)}(x_n)\frac{t^v}{v!}=\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}E_{v+n-1-j}(x)\frac{t^v}{v!}.$$

比较上式两边举级数的系数得

$$\frac{(n-1)!}{2^{n-1}}E_v^{(n)}(x_n)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}E_{v+n-1-j}(x),$$

其 $x_n=x+n-1$; $\delta_{n-1,1},\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$是关于 $x,x+1,\cdots,x+n-2$的 $n-1$元初等对称多项式. 所以有

$$E_v^{(n)}(x)=\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}E_{v+n-1-j}(x-n+1),$$

其中 $\delta_{n-1,1},\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$是关于 $x-n+1,x-n+2,\cdots,x-1$的 $n-1$元初等对称多项式.

定理2 (a)当 $v<n$ 时, $B_v^{(n)}(x)=\dfrac{V!(n-v-1)!}{(n-1)!}\delta_{n-1,v}$.

(b)当 $v\geqslant n$ 时, $B_v^{(n)}(x)=\dfrac{v!}{(n-1)!(v-n)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}\frac{B_{v-j}(x-n+1)}{v-j}$其中 $\delta_{n-1,1}$, $\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$是关于 $x-n+1,x-n+2,\cdots,x-1$的 $n-1$元初等对称多项式.

证 由引理3并注意到 $g^{(n-1-j)}(t)=\displaystyle\sum_{v=0}^{\infty}\frac{1}{v+n-j}B_{v+n-j}(x)\frac{t^v}{v!}$,有

$$(n-1)!\frac{t^n e^{x_n t}}{(e^t-1)^n}=\sum_{j=0}^{n-1}(n-1-j)!\delta_{n-1,j}t^j+\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{B_{v+n-j}(x)}{v+n-j}\frac{t^{v+n}}{v!},$$

即

$$(n-1)!\sum_{v=0}^{\infty}B_v^{(n)}(x_n)\frac{t^v}{v!}=\sum_{j=0}^{n-1}(n-1-j)!\delta_{n-1,j}t^j+\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}\frac{B_{v+n-j}(x)}{v+n-j}\frac{t^{v+n}}{v!}.$$

比较上式两边 t^v 的系数，有

当 $v<n$ 时，$\frac{(n-1)!}{v!}B_v^{(n)}(x_n)=(n-1-v)!\delta_{n-1,v}$，

当 $v\geqslant n$ 时，$(n-1)!B_v^{(n)}(x_n)=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}\frac{v!}{(v-n)!(v-j)}B_{v-j}(x)$.

其中 $x_n=x+n-1$，$\delta_{n-1,1},\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$ 是关于 $x,x+1,\cdots,x+n-2$ 的 $n-1$ 元初等对称多项式．所以有

(a) 当 $v<n$ 时，$B_v^{(n)}=\frac{v!(n-v-1)!}{(n-1)!}\delta_{n-1,v}$.

(b) 当 $v\geqslant n$ 时，$B_v^{(n)}=\frac{v!}{(n-1)!(v-n)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}\frac{B_{v-j}(x-n+1)}{v-j}$. 其中 $\delta_{n-1,1}$，$\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$ 是关于 $x-n+1,x-n+2,\cdots,x-1$ 的 n－1元初等对称多项式.

推论　若高阶 Euler 数 $E_v^{(n)}$ 和高阶 Bernoulli 数 $B_v^{(n)}(n=2,3,4,\cdots)$ 由展开式 $(\frac{2e^t}{e^{2t}+1})^n=\sum_{v=0}^{\infty}E_v^{(n)}\frac{t^v}{v!}$ 和 $(\frac{t}{e^t-1})^n=\sum_{v=0}^{\infty}B_v^{(n)}\frac{t^v}{v!}$ 给出.

则

(c)　$E_v^{(n)}=\frac{2^{v+n-1}}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}E_{v+n-1-j}(1-\frac{n}{2})$，其中 $\delta_{n-1,1},\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$ 是关于 $1-\frac{n}{2},2-\frac{n}{2},\cdots,(n-1)-\frac{n}{2}$，的 $n-1$ 元初对称多项式.

(d) 当 $v<n$ 时，$B_v^{(n)}=\frac{v!(n-v-1)!}{(n-1)!}\delta_{n-1,v}$；当 $v\geqslant n$ 时，$B_v^{(n)}=\frac{v!}{(n-1)!(v-n)!}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\delta_{n-1,j}\frac{B_{v-j}(1-n)}{v-j}$. 其中 $\delta_{n-1,1},\delta_{n-1,2},\cdots,\delta_{n-1,n-1}$ 是关于 $-n+1,-n+2,\cdots,-1$ 的 $n-1$ 元初等对称多项式.

证　由定理1，定理2及注意到 $E_v^{(n)}=2^vE_v^{(n)}(\frac{n}{2})$，$B_v^{(n)}=B_v^{(n)}(0)$ 即得.

由定理1，定理2，推论可把高阶 Euler 多项式和数，高阶 Bernoulli 多项式和数快捷地计算出来.

参 考 文 献

1　张文鹏. 关于 Riemann Zeta 函数的几个恒等式. 科学通报，1991(4)：250～253

2　吴云飞. 一类包含 Bernoulli 多项式的恒等式的计算公式. 数学的实践与认识，1995(2)：32～36

3　王竹溪，郭敦仁. 特殊函数概论. 北京：科学出版社，1965. 1～8，47～49

Computational Formulas for Higher-Order Euler's Polynomials and Bernoulli's Polynomials

Liu Guodong

(Department of Mathematics, Huizhou University)

Abstract Formulas for simple and direct computations of higher-order Euler's polynomials and Bernoulli's polynomials are presented.

Key words higher-order Euler's polynomial; higher-order Bernoulli's polynomial; computational formula