# 关于亏格 $g$ 超椭圆纤维化的奇异纤维的一些组合条件

唐明元

**提　要**　对于一个相对极小的亏格 $g\geqslant 2$ 超椭圆纤维化的奇异纤维，引进了分类对偶图的概念．利用二次复盖和曲线上的 Riemann-Hurwitz 公式，得到了两个组合条件．利用这两条性质，可判定某些带有给定奇异纤维的超椭圆纤维化是不存在的．

**关键词**　超椭圆纤维化；奇异纤维；分类对偶图；二次复盖

**中图法分类号**　O187.1

设 $S$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 上的一个光滑射影曲面，$C$ 是 $\mathbf{C}$ 上的一条光滑射影曲线，$f:S\to C$ 是一个亏格 $g\geqslant 2$ 超椭圆纤维化，即 $f$ 的一般纤维是一条不可约的亏格 $g$ 超椭圆曲线．我们同样假定 $S$ 关于 $f$ 是相对极小的，即在 $f$ 的每一条纤维中设有(−1)-曲线．

设 $F$ 是 $f$ 的任一条一般纤维，则 $F$ 是一条超椭圆曲线．因此，存在一个超椭圆对合 $\sigma_F: F\to F$，使 $F/\sigma_F\cong\mathbf{P}^1$．将这些 $\sigma_F$ 粘合起来就得到一个双有理的 $C$-对合 $\sigma:S\dashrightarrow S$．因为 $S$ 是相对极小的，故 $\sigma$ 在 $S$ 上处处有定义，即 $\sigma$ 是 $S$ 上的一个 $C$-对合．

设 $\rho:\widetilde{S}\to S$ 是对 $\sigma$ 的所有弧立不动点的爆发，则 $\sigma$ 可诱导一个 $C$-对合 $\tilde{\sigma}:\widetilde{S}\to\widetilde{S}$，并且 $\tilde{\sigma}$ 没有弧立不动点，所以商空间 $\widetilde{P}=\widetilde{S}/\tilde{\sigma}$ 是一个光滑曲面，并且 $f$ 诱导了一个 $\widetilde{P}$ 到 $C$ 的直纹 $\tilde{\varphi}:\widetilde{P}\to C$．同时，$\widetilde{S}$ 到 $\widetilde{P}$ 的投影 $\tilde{\theta}:\widetilde{S}\to\widetilde{P}$ 是一个二次复盖，它由一组光滑二次复盖数据 $(\widetilde{R},\tilde{\delta})$ 所决定，并且 $\widetilde{R}\widetilde{F}=2g+2$，这里 $\widetilde{F}$ 是 $\widetilde{P}$ 的一条一般纤维．收缩 $\widetilde{P}$ 的垂直(−1)-曲线，可得到 $\widetilde{P}$ 的一个相对极小模型 $P$，相应的有一个几何直纹 $\varphi:P\to C$，$P$ 一般不是唯一的．详细情况参见[1,2]．

对于一般的相对极小亏格 $g$ 线纤维化 $f:S\to C$，有一些众所周知的组合性质，即带有给定奇异纤维纤维化存在的必要条件．肖刚教授曾给出另外2个组合条件，作者在[3]中也曾给出2个组合条件．本文主要讨论了在超椭圆纤维化中奇异纤维的组合性质．在奇异纤维复式对偶图的基础上引进了分类对偶图的概念．我们所使用的工具是二次复盖和 Riemann-Hurwitz 公式．最终得到了2个结果，即定理1和定理2．

设 $F$ 是 $f$ 的一条奇异纤维，则 $\sigma$ 限制在 $F$ 上是 $F$ 的一个对合，仍记作 $\sigma_F$．以下，我们通过奇异纤维复式对偶图来引进分类对偶图的概念．

---

收稿日期：1997-03-17

作者唐明元，男，副教授，上海师范大学数学系，200234

**定义 1** 设 $f:S\to C$ 是一个亏格 $g$ 纤维化,$F=\sum_{i=1}^{n}m_i\Gamma_i$ 是 $f$ 的一条奇异纤维,$G_F$ 是 $F$ 的复式对偶图,$v_i$是$\Gamma_i$在$G_F$中的对应顶点.我们给$v_i$赋予三元数组$(p_a(\Gamma_i),m_i,e_i)$,其中$e_i=\Gamma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$,记作 $\overline{G}_F$,称为 $F$ 的分类对偶图.

为了读者方便起见,我们再叙述主分支的概念.

**定义 2** 设 $f:S\to C$ 是亏格 $g$ 纤维化,$F$ 是 $f$ 的奇异纤维化,$F$ 仅含正规交,$\Gamma$ 是 $F$ 的不可约分支.若 $\Gamma$ 不是光滑有理的,或 $\Gamma$ 与其它分支相交至少 3 点,则称 $\Gamma$ 是 $F$ 的一条主分支.

显然,$\sigma_F$ 可诱导 $\overline{G}_F$ 的一个自同构 $\tau_F$,并 $\tau_F$ 要么是对合,要么是恒等映射 $id_F$.

**引理 1** 设 $\Gamma$ 是 $F$ 的不可约分支,$p_a(\Gamma)>0$,则 $\sigma_F$ 限制在 $\Gamma$ 上是 $\Gamma$ 的一个对合.

**证明** 因为 $\sigma_F$ 是 $F$ 上的对合.将 $F$ 在 $\widetilde{S}$ 中的原像记作 $F'$,$\Gamma$ 在 $F'$ 中的严格原像仍记作 $\Gamma$,$\Gamma$ 在 $\widetilde{\theta}$ 下的像记作 $\widetilde{\Gamma}$,则只有下述 3 种可能:

(1) $\widetilde{\theta}^*\widetilde{\Gamma}=2\Gamma$,

(2) $\widetilde{\theta}^*\widetilde{\Gamma}=\Gamma+\Gamma'$,这里 $\Gamma'$是 $F'$的另一条不可约分支,

(3) $\widetilde{\theta}^*\widetilde{\Gamma}=\Gamma$.

因为 $p_a(\Gamma)>0$,所以 $\Gamma$ 上的点不能全是不动点,故(1)不可能.同样,由于 $\widetilde{\Gamma}$ 是有理的,因此(2)也不可能.所以只能 $\widetilde{\theta}^*\widetilde{\Gamma}=\Gamma$,即 $\sigma_{F|\Gamma}$是 $\Gamma$ 的一个对合. □

**引理 2** 设 $\overline{G}_F$ 是 $F$ 的分类对偶图,含 $G_1$ 为 $\tau_F$ 在 $\overline{G}_F$ 中的不动点集,$\overline{G}=\overline{G}_F-G_1$,若 $\tau_F\neq id_F$,则 $\overline{G}$ 是一个对称图.

**证明** 因为 $\tau_F\neq id_F$,所以 $\overline{G}\neq\varnothing$.故存在 $v_1,v_2\in\overline{G}$,使 $\tau_F(v_1)=v_2$.考查 $v_1$ 在 $\overline{G}$ 中的所有邻点 $v_{1i}(i=1,2,\cdots,k)$.因为 $\tau_F$ 是对合,所以一定存在 $v_2$ 在 $\overline{G}$ 中的邻点 $v_{2i}$,使 $\tau_F(v_{1i})=v_{2i}(i=1,2,\cdots,k)$,并且 $v_2$ 也只有这些邻点.再考查 $v_{1i}$在 $\overline{G}$ 中的邻点,继续上述工作,最后可得到 $\overline{G}$ 的一个子图 $\overline{G}_1$ 是对称的.若 $\overline{G}-\overline{G}_1\neq\varnothing$,则再取 $u_1,u_2\in\overline{G}-\overline{G}_1$,重复上述工作,又可得到 $\overline{G}$ 的另一个对称子图 $\overline{G}_2$,并且 $\overline{G}_1$ 和 $\overline{G}_2$ 在 $\overline{G}$ 中是不连通的.因此,$\overline{G}_1\cup\overline{G}_2$ 也是 $\overline{G}$ 的对称子图.由于 $\overline{G}$ 是有限集,故最终可得 $\overline{G}=\overline{G}_1\cup\overline{G}_2\cup\cdots\cup\overline{G}_t$,其中 $\overline{G}_i$ 对称,并且 $\overline{G}_i$ 和 $\overline{G}_j$ 在 $\overline{G}$ 中不连通$(i\neq j)$.所以 $\overline{G}$ 是一个对称图. □

**引理 3** 设 $p\in\Gamma$ 是孤立不动点,则 $p$ 在 $F$ 中的阶为偶数.

**证明** 爆发 $p$,设 $p$ 在 $\widetilde{S}$ 中的原像为 $E$,$F$ 在 $\widetilde{S}$ 中的原像为 $F'$,则 $E$ 上的点全是 $\widetilde{\sigma}$ 的不动点,并且 $E$ 在 $F'$中的重数等于 $p$ 在 $F$ 中的阶.设 $E$ 在 $\widetilde{\theta}$ 下的像为 $\widetilde{E}$,则 $\widetilde{\theta}^*\widetilde{E}=2E$,故 $E$ 在 $F'$中的重数为偶数,即 $p$ 在 $F$ 中的阶为偶数. □

下面的两个定理中均设 $F$ 不含 $\sigma$ 的孤立不动点.

**定理 1** 设 $f:S\to C$ 是相对极小的亏格 $g$ 超椭圆纤维化,$F$ 是 $f$ 的奇异纤维,$F$ 仅含正规交,$\overline{G}_F$ 是 $F$ 的分类对偶图,$\Gamma$ 是 $F$ 的一条有理主分支,$m$ 是 $\Gamma$ 在 $F$ 中的重数,$v$ 是 $\Gamma$ 在 $\overline{G}_F$ 中的对应顶点.若 $m=$奇数,并且 $v$ 是 $\tau_F$ 的不动点,则 $\overline{G}_F-\{v\}$中存在两个同构的连通子图 $G_1$ 和 $G_2$,具有下列性质:

(1)在 $\overline{G}_F$ 中,$v$ 是 $G_1$ 和 $G_2$ 的相邻点.

(2)要么存在点 $u$,使 $u\in G_1\cap G_2$,要么 $G_1\cap G_2=\varnothing$,此时,$G_1$ 和 $G_2$ 分别是 $\overline{G}_F-\{v\}$中的极大连通子图.

**证明** 若这样的子图 $G_1$ 和 $G_2$ 不存在.按引理 2 的证明方法,可知与 $v$ 相邻的顶点都是 $\tau_F$ 的不动点.因为 $\Gamma$ 是有理主分支,所以 $\Gamma$ 与其他不可约分支相交至少 3 点,并且这些点都是 $\sigma_F$

的不动点. 再设 $\tilde{\theta}(\Gamma)=\tilde{\Gamma}$. 因为 $v$ 是 $\tau_F$ 的不动点，所以 $\tilde{\theta}^*\tilde{\Gamma}=\Gamma$，或者 $\tilde{\theta}^*\tilde{\Gamma}=2\Gamma$，并且 $\tilde{\Gamma}\cong\mathbf{P}^1$. 因为 $m=$ 奇数，所以只能是 $\tilde{\theta}^*\tilde{\Gamma}=\Gamma$，即 $\sigma_\Gamma=\sigma_F|_\Gamma$ 是 $\Gamma$ 上的一个对合. 因此，$\Gamma$ 上的不动点个数等于 2，矛盾. □

下面，再利用 Riemann-Hurwitz 公式给出另一个结果.

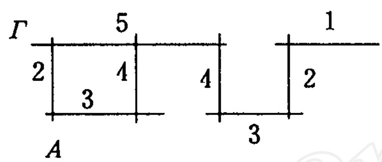
**定理 2**　设 $f:S\to C$ 是相对极小的亏格 $g$ 超椭圆纤维化，$F=\sum_{i=1}^{s}m_i\Gamma_i$ 是奇异纤维，$F$ 仅含正规交，$\sigma$ 是超椭圆对合，$R$ 是 $\sigma$ 的分支轨迹，$\tau_F=id_F$，则 $\sum_{i=1}^{s}m_i(2p_a(\Gamma_i)+2)=2g+2$.

**证明**　设 $\tilde{\theta}$ 是二次复盖，$\tilde{\theta}F=\tilde{F}$，$\tilde{\theta}\Gamma_i=\tilde{\Gamma}_i$. 因为 $m_i=$ 奇数，所以 $\tilde{\theta}^*\tilde{\Gamma}_i\neq 2\Gamma_i$，又因 $\tau_F=id_F$，所以 $\tilde{\theta}^*\tilde{\Gamma}_i\neq\Gamma_i+\Gamma_i'$. 故只有 $\tilde{\theta}^*\tilde{\Gamma}_i=\Gamma_i$. 由 Riemann-Hurwitz 公式可得到 $R\tilde{\Gamma}_i=2p_a(\Gamma_i)+2$，并且 $R\tilde{F}=2g+2$. 从而有

$$2g+2=R\tilde{F}=R(\sum_{i=1}^{s}m_i\tilde{\Gamma}_i)=\sum_{i=1}^{s}m_iR\tilde{\Gamma}_i=\sum_{i=1}^{s}m_i(2p_a(\Gamma_i)+2).$$ □

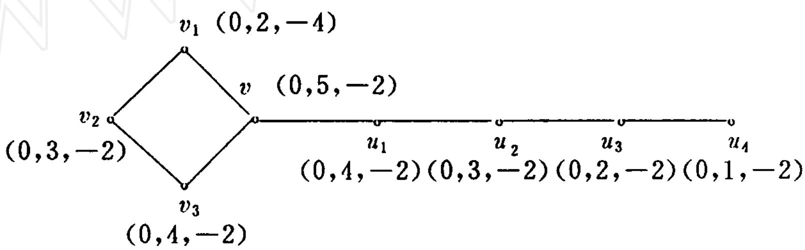
下面，我们给出 2 个例子. [4~6]

例 1　$F=$



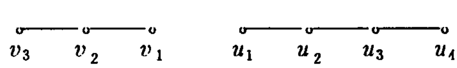

其中 $A$ 是 $(-4)$-曲线，$\Gamma$ 是 $(-2)$-曲线主分支，$m=5$，则 $F$ 的分类对偶图为：

$\overline{G}_F=$



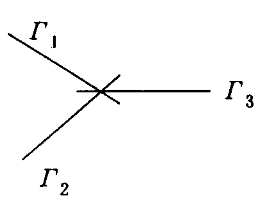

这里 $\Gamma$ 对应 $v$，$A$ 对应 $v_1$.

$\overline{G}_F-\{v\}=$




不存在满足定理 1 所述性质的子图 $G_1$ 和 $G_2$.

例 2　$F=$

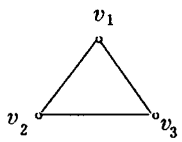



是亏格 3 奇异纤维的数值分类.

其中 $p_a(\Gamma_1)=p_a(\Gamma_2)=1$，$p_a(\Gamma_3)=0$，$\Gamma_i^2=-2(i=1,2,3)$，$m_i=1$，按引理 3，$F$ 不含孤立不动点.

$F$ 的分类对偶图为：

$\bar{G}_F=$




这里，$v_i$ 是 $\Gamma_i$ 所对应的顶点($i=1,2,3$). 按引理 1，$\tau_i=id_F$. 然而，

$$\sum_{i=1}^{3} m_i(2p_a(\Gamma_i)+2)=1\cdot(2+2)+1\cdot(2+2)+1\cdot(0+2)=$$
$$10>8=2\times 3+2$$

不满足定理 2 的结果. 故例 1、例 2 中的奇异纤维不可能在任一超椭圆纤维化中出现. □

## 参 考 文 献

1 肖刚. 代数曲面的纤维化. 上海科学技术出版社，1992

2 Xiao Gang. $\pi_1$ of Elliptic and Hyperelliptic Surfaces. International J of Math，1991，2(5):599~615

3 Tang Mingyuan. Some New Combinatorial Conditions on the Singular Fibre of a Fibration. Northeast Math J，1994，10(4):503~510

4 唐明元. 关于亏格3纤维化奇异纤维的数值分类(Ⅰ). 上海师范大学学报(自然科学版)，1992，21(4):8~14

5 唐明元. 关于亏格3纤维化奇异纤维的数值分类(Ⅱ). 上海师范大学学报(自然科学版)，1992，23(4):97~102

6 唐明元. 关于亏格3纤维化奇异纤维的数值分类(Ⅲ). 上海师范大学学报(自然科学版)，1992，24(1):14~19

# Some Combinatorial Conditions on the Singular Fibre of a Hyperelliptic Fibration of Genus $g$

*Tang Mingyuan*
(Department of Mathematics)

**Abstract** For the Singular fibre of a relatively minimal hyperelliptic fibration of genus $g\geqslant 2$, we introduce the concept of class dual graph. Using the double cover and Riemann-Hurwitz formula, we obtain two combinatorial conditions. We can use the two properties as above to show that there are no hyperelliptic fibration with given singular fibre.

**Key words** hyperelliptic fibration; singular fibre; class dual graph; double cover