关于路长分布闭包的若干注记

蔡　小　涛

(代数专业研究生)

本文回答了1976年R. J. Faudree和R. H. Schelp在美国密执安国际图论议上提出的关于路长分布闭包的二个问题,並对另一个问题作了部分的回答。

一、引　　言

本文所采用的符号和术语取自[1]和[2]。

一个有n个顶点的简单图G,其两个不同的顶点u与v,被一条长l-1的路连接,称$P_l(v,v)$存在。若u与v是图G的任意一对不同顶点,都有$P_l(v,v)$存在,则称图G有P_l性质。S是$\{2,3,\cdots n\}$的一个子集,路长分布闭包$\overline{S}$定义为具有下列性质的自然数j的集合,若任一个n个顶点的图G有P_i性质,i取遍集合S,则G有P_j性质。我们容易得到:若$i\in\overline{S}$,有$i\in S$,其中$i=3$,4或n(见[2]定理5)。关于路长分布闭包的详细性质是不太清楚的。1976年,在美国密执安国际图论会议上,R. J. Faudree和R. H. Schelp[2]提出了四个问题。其中第八个问题为:S是$\{3,4,\cdots,n\}$的一个子集,问怎样的$j(\in\{3,4,\cdots,n\})$?有$j\in\overline{S}$可推得$j\in S$。特别,$j=5$将是如何?第九个问题为:S是$\{4,5,\cdots n\}$的一个子集,问$\overline{S}$是否为一个自然数闭区间(即$\{\overline{S}=i|t\leqslant i\leqslant r,\ t,\ r\in\{1,2,3,\cdots,n\}$)?第十个问题为:找一个$\{3,4,\cdots n\}$的子集$S$,使$S\neq\overline{S}$。本文指出:当$n\geqslant 11$,$j=5$时,第八个问题的回答是肯定的,但$j=5$,$n=6$,7,8,9,10时回答是否定的。並回答了第九个问题。本文还指出,若图G有P_3和$P_i(i=7,8,9)$性质,可推得G有P_{i-1}性质。这否定地解决了第八个问题$j=6$,7,8的情况,同时回答了第十个问题。

二、一个有$P_i(i\neq 2,5)$而没有P_2,P_5性质的图

构作一个简单图G如下页:

其中$k\geqslant 2$,$G[\{a_1,\cdots,a_k,c_1,c_2,b_1,b_2\}]$是一个完全图。

引理1　在图G中,$\forall u,v\in V(G)$且$u\neq v$,

(i) 若$\{u,v\}\neq\{x,y\}$,则$P_i(u,v)$存在,$3\leqslant i\leqslant n$。

(ii) 若$\{u,v\}=\{x,y\}$,则$P_i(u,v)$存在,$3\leqslant i\leqslant 4$和$6\leqslant i\leqslant n$。

证明:显然有$n\geqslant 11$。令$\{a_1,\cdots,a_k,b_1,b_2,c_1,c_2\}$为$H$。顶点集一个划分$\pi$:$\{H\cap\{a\}\cap\{x,y\}\cap\{d,c\}Au,\ v\in V(G)(u\neq v)$,且$\{u,v\}\neq\{x,y\}$

情形1:$u,v\in H$

本文1981年10月18日收到

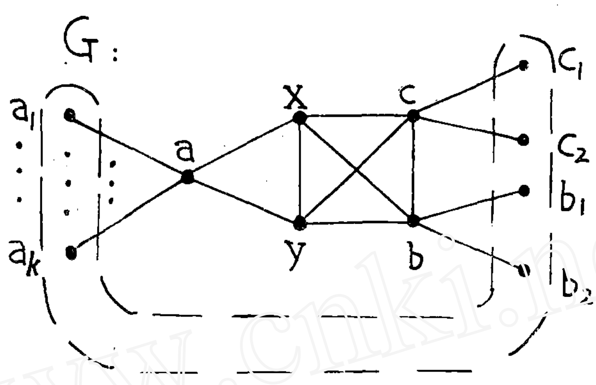

图 1

因为 $G[H]$ 是完全图，$|H|=n-5\geqslant6$。可得 $P_i(v,v)$ 存在，$3\leqslant i\leqslant n-5$。不妨设 $v=a_1$，在 G 中存在一条以 u 为端点，经过 $H-\{a_1\}$，另一端点为 c_i ($\neq u$, $i=1$ 或 2) 的长 $n-7$ 的路。再过 c, b, y, x, a, $a_1=v$ 构成一条 Hamilton 路。在 u 与 c_i 段间 (至少有 3 个顶点) 和 c 与 a 段间，适当地分别删去 0 至 4 个顶点，可得 $P_i(u,v)$ 存在，$n-4\leqslant i\leqslant n$。

u,v 关于划分 π 的其他七种情形的证明方法与情形 1 相仿，同样可得 $P_i(u,v)$ 存在，$3\leqslant i\leqslant n$。

(i) 得证。

(ii) 的证明与(i)的情形相仿，在此从略。

引理 2 在 G 中，$P_5(x,y)$ 不存在。

证明：假若 $P_5(x,y)$ 存在。因在 G 中 x, y 的邻点集为 $\{x,y,a,b,c\}$，所以在 $P_5(x,y)$ 中，x,y 的二个邻点只能为 $\{a,b,c\}$ 集中的顶点。若其一邻点为 a，另一邻点为 b (或 c)。因 a 与 b (或 c) 除了 x,y 外没有公共邻点，所以 $P_5(x,y)$ 不可能存在，与假设矛盾；若 x,y 的二个邻点为 b 和 c，同理可得 $P_5(x,y)$ 不存在，与假设矛盾，故引理 2 得证。

由引理 1 和引理 2 可直接推出：

定理 1 当 $n\geqslant11$ 时，若集合 S 是 $\{3,4,\cdots,n\}$ 一个子集，且 $5\in\overline{S}$，则 $5\in S$。

由图 G 及引理 1和2，当 $n\geqslant11$ 时，我们可得：$\overline{\{i|i=4 \text{ 和 } 6\leqslant i\leqslant n\}}=\{i|i=4 \text{ 和 } 6\leqslant i\leqslant n\}$，所以对第九问题给出了一个否定的答案。

三、j＝5, 6⩽n⩽10 的第八问题的说明

定理 2 简单图 G，有 n 个顶点，且有 P_3 和 P_n 性质，其中 $n=6, 7, 8, 9, 10$，则 G 有 P_5 性质。

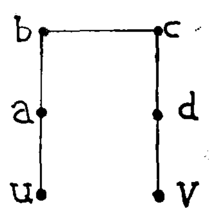

图 2

证明：当 $n=6$ 的情形。

若 G 没有 P_5 性质，存在 $u,v\in V(G)$ ($u\neq v$)，使 $P_5(u,v)$ 不存在。因 G 有 P_6 性质，得 $P_6(u,v)$，如图 2。因 G 有 P_3 性质，存在一顶点 k_1 和 a, d 都相邻。$k_1\in\{u,v\}$，否则 $P_5(u,v)$ 存在，与假设矛盾。不妨设 $k_1=v$，故我们只要考虑图 3 的情形。对于 u,c 而言，同样存在一顶点 k_2 和 u,c 相邻。若 $k_2\in\{a,b\}$，显然 $P_5(u,v)$ 存在；若 $k_2=v$，则 $P_5(u,v)$ 也存在，即路

$(v,\ c,\ b,\ a,\ u)$。故只要考虑 $k_2=d$ 的情形，如图 4。因为有 P_6 性质，$P_6(a,d)$ 存在，那么 $\{u,v\}$ 中必有顶点与 $\{b,c\}$ 中顶点相邻，不妨设 u 与 c 相邻。那么 $P_5(u,v)$ 存在，即路 (u,c,b,a,v)，与假设矛盾，故 $n=6$ 时定理 2 得证。

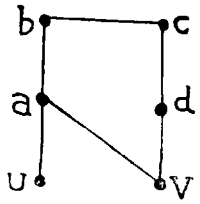

图 3

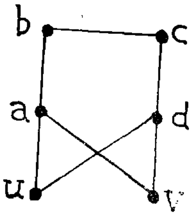

图 4

对于 $n=7,8,9,10$ 的情形的证明与 $n=6$ 的情形相仿，同样可得 P_5 性质存在。

利用定理 2，我们可得，$5\in\overline{\{3,n\}}$，其中 $n=6,7,8,9,10$。可见 $i=5$，$6\leqslant n\leqslant 10$，$5\in\overline{S}$ 时，5 不一定属于 S。同时可看到前一节构作的图是具有 $P_i(i\neq 2,5)$ 而没有 P_2，P_5 性质的顶点最少的图之一。

四、$4\leqslant n\leqslant 10$ 的第九问题的说明

在 $7\leqslant n\leqslant 10$ 时，第九问题的回答仍然是否定的。我们通过下列两个图可直接看到。

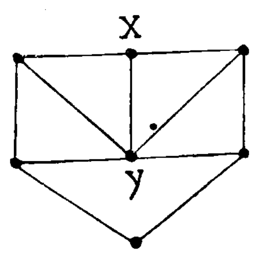

图 5

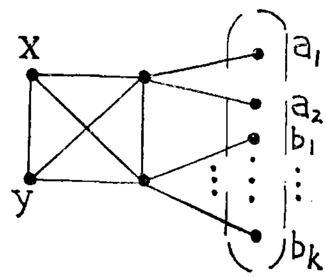

图 6

其中 $2\leqslant k\leqslant 4$，$\{a_1,\ a_2,\ b_1\cdots,\ b_k\}$ 的生成子图是全完图。

容易验证此两图有 P_4 和 P_6 性质，而不具有 P_5 性质，因为 $P_5(x,\ y)$ 不存在。我们得 $5\ \bar{\in}\ \overline{\{4,6\}}$，而 $4,6\in\overline{\{4,6\}}$，即 $\{4,6\}$ 的路长分布闭包不是一个自然数闭区间。

当 $n=6$ 时，第九问题的回答是肯定的。即 $\overline{S}$ 是一个自然数闭区间。因为 S 是 $\{4,5,6,\}$ 的一个子集，且存在一个 6 个顶点、有 P_4，P_5，P_6 而没有 P_2，P_3 性质的图（如图 7），所以 $S\subset\{4,5,6\}$。若 $6\in\overline{S}$，那么 $6\in S$（见[2]定理 5）。通过[3]的附录 1 可直接验证 $5\in\overline{\{6\}}\subset\overline{S}$，所以 $\overline{S}$ 是一个自然数闭区间。若 $6\ \bar{\in}\ \overline{S}$，显然 $\overline{S}$ 是一个自然数闭区间。

当 $n=5$ 时，我们利用图 8，同样可证 $\overline{S}$ 仍是一个自然数闭区间。当 $n=4$ 时，显见 $\overline{S}$ 是一个自然数闭区间。

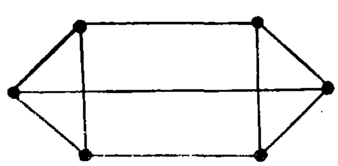
图 7

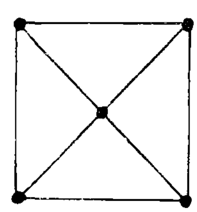
图 8

五、一个有关 P_i 性质的定理

定理 3 简单图 G，有 P_3 和 P_i 性质，其中 $i=7, 8, 9$，则 G 有 P_{i-1} 性质。

证明：先证 $i=7$ 的情形。

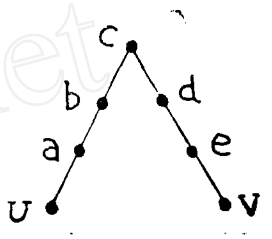

图 9

若图 G 没有 P_6 性质，即存在u，$v\in V(G)$，$u\neq v$，使 $P_6(u,v)$ 不存在。因 G 有 P_7 性质，有 $P_7(u,v)$ 存在，如图 9。因 G 有 P_3 性质，有一顶点 k_1 与 u,c 相邻，另一顶点 k_2 与 v,c 相邻。显然 $k_1=a,b$ 或 e，或者 $k_2=e,d$ 或 a，或者 k_1，$k_2\overline{\in}\{u, a, b, c, d, e, v\}$ 时都有 $P_6(u,v)$，我们只需考虑下列三种情形，

情况 1：$k_1=d, k_2=b$；　情况 2：$k_1=d$，$k=u$；　情况 3：$k_1=v$，$k=u$。

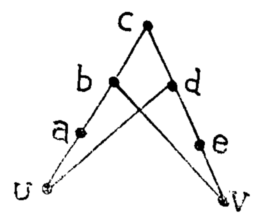

图 10

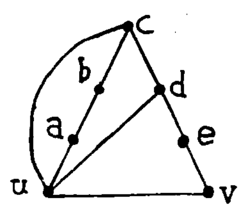

图 11

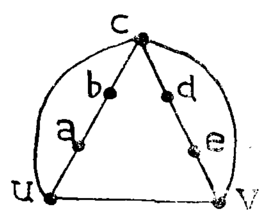

图 12

情况 1：如图 10。因 $P_3(b,v)$ 存在，有顶点 k_1^1 与 b,v 相邻。若 $k_1^1\overline{\in}\{u,d,c\}$，有 $P_6(u,v)$ 存在，即路(u, d, c, b, k_1^1, v)；若 $k_1^1\in\{u, d\}$ 时，$P_6(u,v)$显见存在。所以只要考虑 $k_1^1=c$ 的情形，如图 13。对 u,d 而言，同理只要考虑图 14 的情形。对 a,e 而言，有一顶点 k_2^1 与 a，e 相邻。若 $k_2^1=u$(或 v)，则 $P_6(u,v)$存在，即路(u,e,d,c,b,v)；若 $k_2^1=b$(或 d)，显见 $P_6(u,v)$ 也存在，即路(v,e,b,c,d,u)；若 $k_2^1=c$，则 $P_6(u,v)$存在。故只需考虑 $k_2^1\overline{\in}\{u, v, b, c, d\}$ 的情形，如图 15。对 c，k_2^1 而言，存在顶点 k_3^1 与它们相邻。若 $k_3^1\overline{\in}\{u,a,v\}$，则 $P_6(u, v)$存在；若 $k_3^1=a$，显然 $P_6(u, v)$存在；若 $k_3^1=u$(或 v)，则 $P_6(u, v)$也存在，即路(u, k_2^1, e,d, c, v)，与假设矛盾。

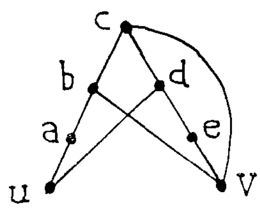

图 13

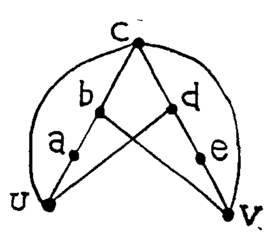

图 14

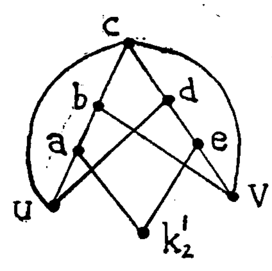

图 15

情况 2：如图 11。对 b,v 而言，与图 10 的情况相仿只需要考虑图 16 的情形。对 u,a而言，存在顶点 k_2^2 与它们相邻。若 $k_2^2\overline{\in}\{b,c,v\}$，则 $P_6(u,v)$存在；若 $k_2^2\in\{b,c\}$，则显然 $P_6(u,v)$存在。故只需考虑 $k_2^2=v$ 的情形，如图 17。对 b,c而言，有顶点 k_3^2 与 b,c 相邻。若 $k_3^2\overline{\in}\{u, a, v\}$，显然 $P_6(u,v)$存在；若 $k_3^2=u$，$P_6(u,v)$ 也存在；若 $k_3^2=a$，$P_6(u,v)$存在，即路(u,a,c,d,e,v)；若

$k_3^2=v$，得图 18 的情形。而图 10 是其生成子图，有 $P_6(u,v)$ 存在，与假设矛盾。

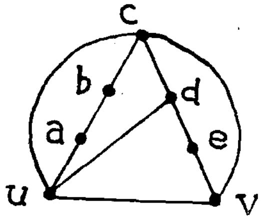

图　16

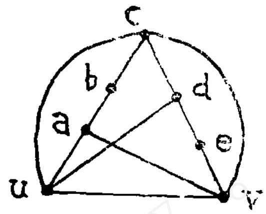

图　17

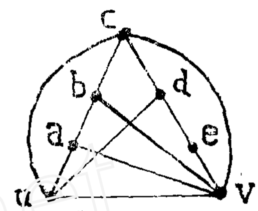

图　18

情况 3：如图 12。对 a,u 而言，与图 16 的情形相仿，只需考虑图 19 的情形。对 b,e，存在顶点 k^3 与 b,e 相邻，若 $k^3\in\{u,a,v\}$，$P_6(u,v)$ 存在；若 $k^3=u$，显然 $P_6(u,v)$ 存在；若 $k^3=a$，那么 $P_6(u,v)$ 也存在，即路 (v,a,e,d,c,u)；若 $k^3=v$，得图 20 的情形。而图 11 是其生成子图，有 $P_6(u,v)$ 存在，与假设矛盾。本定理得证。

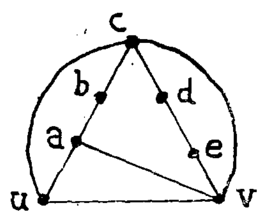

图　19

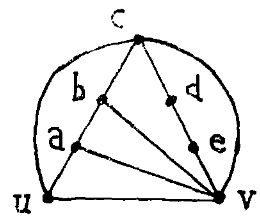

图　20

$i=8,9$ 的情形的证明与 $i=7$ 基本相似，不再详述。

由定理 3 立刻可得：$i-1\in\overline{\{3,i\}}$，其中 $i=7, 8, 9$。这否定地回答了第八问题中 $j=6, 7, 8$ 的三种情况。同时解决了第十个问题，即当 $n\geqslant7$ 时，$S=\{3,i\}$，其中 $i=7, 8, 9$，有 $\bar{S}\neq S$。当 $4\leqslant n\leqslant6$ 时，通过[3]的附录 1 容易验证 $n-1\in\overline{\{n\}}$，也就是 $\overline{\{n\}}\neq\{n\}$。

吴望名老师，李慰萱老师对本文提出了宝贵意见，谨此致谢。

参　考　文　献

[1] J. A. Bonday and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, Macmillan Press L. T. D. 1976.
[2] R. J. Faudree and R. H. Schelp, Various Length Paths in Graphs, in Theory and Applications of Graphs, Proceedngs, Michigan May 11—15 1976. 160—173.
[3] F. Harary,图论，李慰萱译，上海科学技术出版社，1979.

SOME NOTES ON THE CLOSURE OF PATH LENGTH DISTRIBUTION

Cai Xiaotao

ABSTRACT

A simple graph G of order n satisfies property P_i if between every pair of

distinct vertices of G, there exists a path of length $i-1$。 Let S be a subset of $\{2, 3, \cdots, n\}$。 The closure $\overline{S}$ of S is defined to be the set of j in $\{2, 3, \cdots, n\}$ suth that if G is any graph of order n satisfying P_i for all $i \in S$, then G satisfies P_j. In 1976 R. J. Faudree and R. H. Schelp [2] proposed the four questions of the closure.

In this paper the following main results are proved:

(1) Let S be any subset of $\{3, 4, \cdots, n\}$ and $n \geqslant 11$, then $5 \in \overline{S}$ implies $5 \in S$.

(2) If G is a simple graph of order $n \geqslant i$ with properties P_3 and P_i, where $i=7,8$ and 9, then G have property P_{i-1}.

This two results imply that the answers to the eighth question under the case $j=5$, $n \geqslant 11$ is in the affirmative but to the eighth question under the cases $j=6,7$ and8 and the ninth quistion under the case $n \geqslant 7$ are in the negative. Also give examples of the tenth (i. e, $\overline{\{3, i\}} \neq \{3, i\}$, where $i=7$, 8 and 9).