第24卷第2期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 24, No. 2
1995年6月　　J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)　　Jun., 1995

Möbius 交错偏序集

周才军
(数学系)

提　要　本文研究了 Möbius 交错偏序集，给出该类偏序集的纤维构造定理，并讨论其在积和区间运算下的保持情况．本文将 Baclawski 有关 CM 偏序集的一些性质推广到 Möbius 交错偏序集上．

关键词　偏序集；纤维；Möbius 交错偏序集
中图法分类号　O157.1

在过去20年里，在国际上许多著名的学者曾广泛地研究过 CM 偏序集，这一研究成功地把组合数学、交换代数、代数拓扑联系起来，给组合数学的研究注入了生机[1,3].

由于 CM 偏序集是一个 Möbius 交错偏序集，反之则不然，本文将从组合的角度一般地讨论 Möbius 交错偏序集，得到了该类偏序集类似于 CM 偏序集的许多重要的性质，诸如纤维构造定理以及积和取区间运算保持等结果．

首先，我们回忆一些基本的概念．设 P 是有限偏序集，P 上的 Möbius 函数是一个映射 $\mu_P: P\times P\to Z$（Z 是整数集），它满足下面三个条件：

(1) $\mu_P(x,x)=1$，对任何 $x\in P$；

(2) $\mu_P(x,y)=0$，对于 $x,y\in P$，$x\not\leqslant y$；

(3) $\mu_P(x,y)=\sum_{x\leqslant z\leqslant y}\mu_P(x,y)$，对于 $x,y\in P$. $x<y$.

若不发生混淆，简记 $\mu_P(x,y)=\mu(x,y)$. 为方便起见，我们约定 $\mu(P)=\mu_{\hat{P}}(\hat{0},\hat{1})$，这里 $\hat{P}$ 是由 P 添加两个元素 $\hat{0},\hat{1}$ 所得的偏序集，使得对任何 $x\in P$ 有 $\hat{0}<x<\hat{1}$. 特别记 $\mu((\hat{0},x))=\mu(x)$，对任何 $x\in P$.

有限偏序集 P 的一个序链是 P 的一个全序子集：$x_1<x_2<\cdots<x_s$，并称 s 为这个序链的秩．若 P 的每个极大的序链均具有相同的长度，则称 P 是有秩偏序集，并记这一长度为 $r(P)$. 显然若 P 是有秩偏序集，对于 $x,y\in P$，$x<y$，则 $(x,y)=\{z\mid x<z<y\}$ 作为子偏序集也是有秩的．特别，记 $r(y)=r((\hat{0},y])$.

设 P 是有秩的有限偏序集，称 P 是几乎 Möbius 交错的，若任给

$$x,y\in\hat{P},x\leqslant y,(x,y)\neq(\hat{0},\hat{1})$$

本文于1995年3月31日收到．

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

有

$$(-1)^{r(x,y)-1}\mu(x,y)\geqslant 0.$$

如果还有

$$(-1)^{r(P)-1}\mu(P)\geqslant 0,$$

则称 P 是 Möbius 交错的．

1 Möbius 交错偏序集的纤维构造

本节我们讨论 Möbius 交错偏序集的纤维构造，得到了完全类似于文[1]中 CM 偏序集纤维构造的结果．

设 $f:P\rightarrow Q$ 是两个有限偏序集的保序映射，即对于任何 $x,y\in P,x\leqslant y$，有 $f(x)\leqslant f(y)$，我们称 $f/y=\{x\in P\mid f(x)\geqslant y\}$ 为 y 上的纤维，这里 $y\in Q$．为证明我们的纤维构造定理，需要如下的引理，这个引理首先在 1980 年被 K．Baclawski 用层论中上同调群理论所发现，后来 J．W．Walker[4]用纯组合方法证明了这一结果．

引理 1.1 设 P,Q 是有限偏序集，$f:P\rightarrow Q$ 是保序映射，则

$$\mu(P)=\mu(Q)+\sum_{y\in Q}\mu(f/y)\,\mu_Q(\hat{0},y).$$

$\hat{0}$是添加在 Q 中的最小元素．

现在讨论本节的纤维构造定理．

引理 1.2 设 P,Q 是有秩的有限偏序集，$f:P\rightarrow Q$ 是保序映射．假定下列条件满足：

(1) $r(P)\geqslant r(Q)$，

(2) Q 是几乎 Möbius 交错的，

(3) 对每个 $y\in Q,f/y$ 是 Möbius 交错的，

(4) 对每个 $y\in Q,r(P)-r(F/y)=r(y)-1$.

则 P 是几乎 Möbius 交错的．如果上述条件满足且下列条件之一满足：

(i) $r(P)=r(Q)$且 Q 是 Möbius 交错的．

(ii) $\mu(Q)=0$

则 P 是 Möbius 交错的．

证明 对于任意 $x\in P$，由条件(1)和(4)易知

$$r(\hat{0},x)\geqslant r(\hat{0},f(x)),$$

即 f 是减秩映射．由于 $x\in f/f(x)$，从而$(x,\hat{1})$是 $f/f(x)$中的开区间，所以由条件(3)知$(x,\hat{1})$是 Möbius 交错的．因此只须证明$(\hat{0},x)$是 Möbius 交错的即可．

下面用归纳法证明$(\hat{0},x)$是 Möbius 交错的，只要对 P 的秩进行归纳即可．令

$$P'=(\hat{0},x),\qquad Q=\begin{cases}(\hat{0},f(x)) & 若\ f(x)\notin f(P')\\ (0,f(x)] & 若\ f(x)\in f(P').\end{cases}$$

并且考虑 f 在 P'上的限制映射 $f':P'\rightarrow Q'$，容易验证 f'满足定理的条件(1)，(2)，(3)，(4)．对于条件(i)，(ii)，我们有：

若 $Q'=(\hat{0},f(x)]$，Q'有最大元素 $f(x)$，这时显然有 $\mu(Q')=0$.

若 $Q'=(\hat{0},f(x))$，x 是 $f/f(x)$的极小元素，由(4)知

$$r(\hat{0},x)-r(\hat{0},f(x)),$$

即

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$r(P') = r(Q').$$

因此(i),(ii)中至少有一个成立,由归纳法知$(\hat{0},x)$是Möbius交错的,从而P是几乎Möbius交错的.为完成定理证明,还需验证在满足(i)或(ii)时P是Möbius交错的.

令

$$\mu(f/y) = (-1)^{r(f/y)-1}d_y, \quad d_y \geqslant 0,$$
$$\mu_Q(\hat{0},y) = (-1)^{r(y)-1}d'_y, \quad d'_y \geqslant 0.$$

由引理1.1有

$$\mu(P) = \mu(Q) + \sum_{y\in Q}\mu(f/y)\mu_Q(y)$$
$$= \mu(Q) + \sum_{y\in Q}(-1)^{r(P)-1}d_y d'_y.$$

因此,若$r(P)=r(Q)$,则$(-1)^{r(P)-1}\mu(P)\geqslant 0$;

若$\mu(Q)=0$,则仍有$(-1)^{r(P)-1}\mu(P)\geqslant 0$

总之不论f满足(i)或(ii),P是Möbius交错的.

2　偏序集的积运算

在这一节中,我们讨论有秩的有限偏序集的积运算.结果显示,几乎Möbius交错偏序集在积运算是保持的.

设P,Q是两个偏序集,令$P\times Q=\{(x,y)|x\in P,y\in Q\}$.容易验证$P,Q$的序关系自然的导出$P\times Q$上的如下序关系:对$P\times Q$中的两个元素$(x,y),(x',y')$,规定

$$(x,y)\leqslant(x',y')\text{ 当且仅当 }x\leqslant x',y\leqslant y'.$$

在这个序关系下$P\times Q$构成一个偏序集,并称这个偏序集为P与Q的积.显然若P,Q均有秩,则$P\times Q$也有秩,且$r(P\times Q)=r(P)+r(Q)-1$.

为讨论Möbius偏序集的积运算,我们先引进几个记号.设P是一个偏序集,$x\in P$,记$J(x)=(\hat{0},x]$,$V(x)=[x,\hat{1})$,在这种记号下,设(x,y)偏序集$P\times Q$的元素,显然有

$$J(x,y) = J(x)\times J(y),$$
$$V(x,y) = V(x)\times V(y).$$

引理2.1　设P,Q是有限偏序集,若$\mu(P)=0$且$\mu(Q)=0$,则

$$\mu(P\times Q) = 0$$

证明　若P,Q都有最小元素,则$P\times Q$亦有最小元素,从而$\mu(P\times Q)=0$.下面不妨假设P没有最小元素,作映射

$$f: P\times Q\to P,(x,y)\to x.$$

显然f是保序映射,且对每一个$x\in P$,f在x上的纤维为$f/x=V(x)\times Q$.因为$V(x)$的元素个数$<P$的元素个数,且$\mu(V(x))=0$,由归纳法知$\mu(f/x)=0$.因此由定理1.1知

$$\mu(P\times Q) = \mu(P) + \sum_{x\in P}\mu(f/x)\mu_P(x)$$
$$= 0 \qquad \square$$

定理2.2　设P,Q是非空的几乎Möbius交错偏序集,则$P\times Q$是几乎Möbius交错偏序集,若还有$\mu(P)=\mu(Q)=0$,则$P\times Q$是Möbius交错的.

证明　对$P\times Q$的元素个数进行归纳.若P与Q中至少有一个没有最小元素,不妨设P没有最小元素.考虑自然投射$f:P\times Q\to P$.显然f是保序映射,对于每一个$x\in P$,f在x上

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

的纤维为$V(x)\times Q$,由于$V(x)$的元素个数少于P的元素个数且$\mu(V(x))=0$,由归纳法知$V(x)\times Q$是Möbius交错的.容易验证f满足定理1.2中的条件(1),(2),(3),(4),因此$P\times Q$是几乎Möbius交错的.

下面假定P与Q都有最小元素.另一方面设P^*,Q^*是P,Q的反序偏序集,即$x\leqslant y$在P^*中满足的充要条件为$y\leqslant x$在P中成立,类似地可定义Q^*.容易验证P是(几乎)Möbius交错的当且仅当P^*是(几乎)Möbius交错的,且$(P\times Q)^*=P^*\times Q^*$.若$P,Q$至少有一个没有最大元素,则考虑$P^*,Q^*$,由前面的证明知$P^*\times Q^*$是几乎Möbius交错的,从而$P\times Q$是几乎Möbius交错的,由引理2.1,$P\times Q$是Möbius交错的.

因此我们只需证明P与Q都有最大、最小元素的情形,这时$P\times Q$也有最大、最小元素.令x_0为P的最小元素,y_0为Q的最小元素,令R为$P\times Q$去掉最大最小元素所得的偏序集,P'为P去掉x_0所得的偏序集,Q'为Q去掉y_0所得的偏序集.由归纳假设,易知R是几乎Möbius交错的,$P'\times Q$,$P\times Q'$为Möbius交错的.令$P\times Q$的最大元素为m,由于$P'\times Q$,$P\times Q'$是Möbius交错的,为证明$P\times Q$为Möbius交错的,由于$\mu(P\times Q)=0$,这由引理2.1保证,只需证明

$$\mu(R)=(-1)^{r(R)-1}d\ (d\geqslant 0)$$

即可.由下面的计算立刻得到

$$\mu(R)=\mu((P'\times Q)\backslash m)+\mu((P\times Q')\backslash m)-\mu(P'\times Q')\backslash m).$$

前面的证明表明若P,Q是几乎Möbius交错的,则$P\times Q$是几乎Möbius交错的,这一证明依赖于$\mu(P)=\mu(Q)=0$时,$P\times Q$还是Möbius交错的,因此必须验证这一事实,而这由引理2.1所保证.这就完成了定理的证明.

推论 2.3 设P,Q是Möbius交错的,若下列条件之一满足:

(1) $r(P)+r(Q)$是偶数,$r(P)$是奇数且$\mu(Q)=0$;

(2) $r(P)+r(Q)$是奇数,$r(P)$是偶数且$\mu(Q)=0$.

则$P\times Q$是Möbius交错的.

证明 由定理2.2,只需证明

$$\mu(P\times Q)=(-1)^{r(Q)+r(P)}d,d\geqslant 0.$$

考虑自然投射

$$f:P\times Q\to P,(x,y)\to x.$$

由引理1.1和引理1.2知

$$\begin{aligned}\mu(P\times Q)&=\mu(P)+\sum_{x\in P}\mu(f/y)\mu_P(x)\\&=\mu(P)+\sum_{x\in P}\mu(V(x)\times Q)\mu_P(x)\\&=\mu(P)\end{aligned}$$

由假设$(-1)^{r(P)-1}\mu(P)\geqslant 0$,从而当(1)或(2)满足时,$(-1)^{r(P)+r(Q)}\mu(P\times Q)\geqslant 0$,所以$P\times Q$是Möbius偏序集.

3 偏序集的区间运算

设P是有限偏序集,对$x,y\in P$且$x\leqslant y$,记$[x,y]=\{z\in P\mid x\leqslant z\leqslant y\}$,称之为闭区间.再记$\mathrm{Int}P=\{[x,y]\mid$对任意$x,y\in P,x\leqslant y\}$.规定$\mathrm{Int}P$上的序关系为$[x,y]\leqslant[x',y']$当且仅当$x'\leqslant x,y\leqslant y'$.这一序关系显然使$\mathrm{Int}P$成为有限偏序集.容易验证,若$P$是有秩的,则$\mathrm{Int}P$是

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

有秩的，且 $r(P)=r(\mathrm{Int}P)$.

对于有限偏序集 P，它的所有序链 $x_1<x_2<\cdots<x_s$ 在包含关系下自然构成一个偏序集，记为$\triangle P$. P. Hall 用代数拓扑的方法证明了 $\mu(P)=\widetilde{X}(\triangle P)$，这里 $\widetilde{X}(\triangle P)$是把$\triangle P$ 看成抽象的单纯复形所得的约化欧拉示性数．从而利用几何上的重分思想证明了把$\triangle P$ 作为上述的偏序集也有 $\mu(P)=\mu(\triangle P)$. 这一思想在下面的证明中扮演着重要的角色．

定理 3.1 P 是(几乎)Möbius 交错集当且仅当 $\mathrm{Int}P$ 是(几乎)Möbius 交错集，并且

$$\mu(P)=\mu(\mathrm{Int}P).$$

证明 先证 $\mu(P)=\mu(\mathrm{Int}P)$. 由前面的说明，只需证明

$$\mu(\triangle P)=\mu(\mathrm{Int}P).$$

另一方面，考虑$\triangle P$，$\mathrm{Int}P$ 的反序集$(\triangle P)^*$，$(\mathrm{Int}P)^*$，注意到

$$\mu(P)=\mu((\triangle P)^*),\mu((\mathrm{Int}P)^*)=\mu(\mathrm{Int}P),$$

只需证明

$$\mu((\triangle P)^*)=\mu((\mathrm{Int}P)^*).$$

定义保序映射

$$f:(\triangle P)^*\to(\mathrm{Int}P)^*,(x_0<\cdots<x_s)\to[x_0,x_s].$$

容易验证，对于每个$[x,y]\in(\mathrm{Int}P)^*$，纤维 $f/[x,y]=\triangle([x,y])$，从而

$$\mu(f/[x,y])=\mu(\triangle([x,y])=\mu([x,y])=0.$$

因此由引理 1.1

$$\mu((\triangle P)^*)=\mu((\mathrm{Int}P)^*),$$

即

$$\mu(P)=\mu(\mathrm{Int}P).$$

因而我们只需证明 P 是几乎 Möbius 交错的充要条件为 $\mathrm{Int}P$ 是几乎 Möbius 交错的．另外一个结论由上述讨论直接得到．

设 P 是几乎 Möbius 交错的，对任意$[x,y]\in\mathrm{Int}P$，容易验证

$$V([x,y])\cong J(x)\times V(y),J([x,y])\cong\mathrm{Int}([x,y]).$$

这里的记号沿用上一节中的记号，同构为偏序集的同构．由定理 2.1 知 $V([x,y])$是 Möbius 交错的．

至于 $J([x,y])$的 Möbius 交错性，可用归纳法证明，这转化为证明 P 具有最大最小元的情形，即 $P=[a,b]$. 令 $P'=[a,b)$，$P''=(a,b]$，则 P'，P''，$P'\cap P''=(a,b)$均为 Möbius 交错的，因此 $\mathrm{Int}P'$，$\mathrm{Int}P''$，$\mathrm{Int}P'\cap\mathrm{Int}P''$均为 Möbius 交错的．为证明 $\mathrm{Int}P$ 是 Möbius 交错的，只需证明

$$(-1)^{r(P')-1}\mu(\mathrm{Int}P'\cup\mathrm{Int}P'')=0$$

即可．事实上

$$\mu(\mathrm{Int}P'\cup\mathrm{Int}P'')=\mu(\mathrm{Int}P')+\mu(\mathrm{Int}P'')-\mu(\mathrm{Int}(a,b))$$

由于

$$\mu(P')=0,\mu(P'')=0,(-1)^{r(P)-3}\mu(a,b)\geqslant 0,$$

由前面的证明知

$$(-1)^{r(P')-1}\mu(\mathrm{Int}P'\cup\mathrm{Int}P'')\geqslant 0,$$

从而 $J([x,y])$是 Möbius 交错的．

反过来，若 $\mathrm{Int}P$ 是几乎 Möbius 交错的，则对 P 的每一个极大元 x 有

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$V(x,x) \cong J(x) \times V(x) \cong J(x),$$

从而 $J(x)$是 Möbius 交错的．另一方面，对 P 的每一个极小元，

$$V(x,x) \cong J(x) \times V(x) \cong V(x),$$

从而 $V(x)$是 Möbius 交错的．因此 P 是几乎 Möbius 交错的．

参 考 文 献

[1] K. Baclawski, Cohen-Maxaulay ordered sets, *J. Algebra*, 1980, **63**:226～258

[2] K. Baclawski, Galois connections and the leray spectral sequence, *Adv. in Math.*, 1977, **25**

[3] R. P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, *Progress in Math.*, 1983, **41**

[4] J. W. Walker, Homotopy type and Euler characteristic of partially ordered sets, *European J. Combin.*, 1981, **2**:373～384

Alternate Möbius Posets

Zhou Caijun

(Department of Mathematics)

Abstract

In this paper, we discuss alternate Möbius pesets. A fiberation construction theorem for such posets is presented. We also study the situations when taking product and interval of alternate Möbius posets. These results generalize some results of CM posets given by Baclawski.

Keywords poset; fiberation; alternate Möbius poset

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net