第31卷第2期 上海师范大学学报(自然科学版) Vol. 31, No. 2
2002年6月 Journal of Shanghai Teachers University (Natural Sciences) Jun. 2002

K-正则预解算子族的谱映象定理

张寄洲，尹 丹

(上海师范大学 数理信息学院，上海 200234)

摘 要：设 $k \in C(R^+)$，A 是 Banach 空间 X 中的闭稠定线性算子，且 A 生成一个指数有界的 k-正则预解算子族 $R(t)$. 证明了 A 谱和 $R(t)$ 谱之间的一些关系，并由此获得预解算子族，积分半群，积分余弦函数 C_0-半群，强连续余弦函数的相应结果.

关键词：k-正则预解算子族；预解算子族；积分半群；C_0-半群；点谱

中图分类号：O175 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-5137(2002)02-0008-02

1 引言和记号

k-正则预解算子族的概念最近已由 LIZAMA[1]引入，它是预解算子族[2]等概念的自然推广. 例如，积分半群，积分预解族和卷积半群等概念都可以归入 k-预解算子族的框架. 因此，研究关于 k-正则预解算子族的一些问题是很有意义的. 本文主要是研究生成元的谱与 k-正则预解算子族的谱之间的关系，所得结果包含了其它算子族的相应结果[3~7].

设 X 是 Banach 空间，$B(X)$ 表示 X 到自身的有界线性算子全体. 若 A 是 X 中的闭稠定线性算子，其定义域，预解集，谱及预解式分别表示为 $\mathscr{D}(A)$，$\rho(A)$，$\sigma(A)$ 和 $R(\lambda, A)$.

考虑线性 Volterra 方程

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s) A u(s) \mathrm{d}s, \quad t \in J, \tag{1.1}$$

这里 $a \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^+)$ 且 $a(t) \neq 0$，$f \in C(J, X)$，$J = [0, T]$.

定义 1.1 设 A 是 Banach 空间中的闭稠定线性算子，$k \in C(\mathbf{R}^+)$ 和 $a \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^+)$. 称 A 生成 k-正则预解算子族 $\{R(t)\}_{t \geqslant 0}$，如果

(a) $\{R(t)\}_{t \geqslant 0}$ 是 X 上的一个强连续有界线性算子族且 $R(0) = k(0)I$；

(b) $R(t)\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(A)$ 且对 $x \in \mathscr{D}(A)$ 和 $t \geqslant 0$，$AR(t)x = R(t)Ax$；

(c) $R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s) R(s) A x \mathrm{d}s, \quad \forall\, x \in \mathscr{D}(A), \ t \geqslant 0$.

此外，如果存在常数 $M \geqslant 1$，$\omega \in \mathbf{R}$，使得 $\|R(t)\| \leqslant M e^{\omega t} (t \geqslant 0)$，则称 $\{R(t)\}_{t \geqslant 0}$ 是指数有界的.

在全文中，假设，$R(t)$，$a(t)$ 和 $k(t) \neq 0$ 是指数有界的. $\hat{a}(\lambda)$，$\hat{k}(\lambda)$ 和 $\hat{R}(\lambda)$ 分别表示 $a(t)$，$k(t)$ 和 $R(t)$ 的 Laplace 变换，且对 $\lambda > \omega$，设 $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ 和 $k \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^+)$. 根据文[1]中的引理 2.2，得知

收稿日期：2001-01-12

作者简介：张寄洲(1958-)，男，上海师范大学数理信息学院教授，博士. 尹 丹(1978-)，女，上海师范大学数理信息学院硕士研究生.

定义 1.1 中的 (c) 等价于

$$R(t)x = k(t)x + A\int_0^t a(t-s)R(s)x\mathrm{d}s, \quad \forall\ x \in X,\ t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

定义 1.2 称 $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为以 T 为周期的 k-正则预解算子族,如果 $\forall\ x \in X$,和 $t \geqslant 0$, $R(t+T)x = R(t)x$.

定义 1.3 设 $\lambda \in \sigma(A)$,则 $\sigma_p(A) = \{\lambda, R(\lambda, A)$ 不存在$\}$ 称为 A 的点谱.

引理 1.3[1] A 生成一个指数有解的 k-正则预解算子族 $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 当且仅当

(a) $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ 且 $1/\hat{a}(\lambda) \in \rho(A), \forall\ \lambda > \omega$;

(b) $\hat{k}(\lambda)(I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda s}R(s)x\mathrm{d}s,\ \forall\ x \in X,\ \lambda > \omega$.

2 主要定理

设 $\mathbf{C}$ 表示复数集,$a \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)$,$a^{*n} = a * a * \cdots * a$ 为 a 的 n 次卷积,这里

$$(a*a)(t) = \int_0^t a(t-s)a(s)ds, \quad \forall\ t \geqslant 0.$$

对固定的 $\mu \in \mathbf{C}$,由于 $a \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^+)$,级数 $\sum_{n=2}^\infty \mu^n a(t)^{*n}$ 在区间 $[0,T]$ 上一致收敛于连续函数 $q_0(t,\mu)$ [3]. 因此,可以定义

$$r(t,\mu) = k(t) + \int_0^t k(t-s)q(s,\mu)\mathrm{d}s, \quad \forall\ t \in [0,T]. \tag{2.1}$$

这里 $q(s,\mu) = \mu\, a(s) + q_0(s,\mu)$.

考虑下面的 Volterra 方程:

$$u(t,\mu) = k(t) + \mu\int_0^t a(t-s)u(s,\mu)\mathrm{d}s, \quad \forall\ t \in [0,T]. \tag{2.2}$$

引理 2.1 对 $t \in [0,\ T]$ 和固定的 $\mu \in \mathbf{C}$,方程(2.2)有唯一解(2.1).

证明 固定 $\mu \in \mathbf{C}$ 和对 $t \in [0,\ T]$,有

$$\begin{aligned}\mu(a*q)(t) &= \mu\, a * (\mu\, a + q_0)(t) = \sum_{n=2}^\infty \mu^n a(t)^{*n} \\ &= q_0(t,\mu) = q(t,r) - \mu\, a(t).\end{aligned} \tag{2.3}$$

利用(2.3),可证(2.1)是方程(2.2)的解. 事实上,

$$\begin{aligned}\mu\int_0^t a(t-s)r(s,\mu)\mathrm{d}s &= \mu(a*r)(t) = \mu(a*k)(t) + \mu(a*q*k)(t) \\ &= \mu(a*k)(t) + (q*k)(t) - \mu(a*k)(t) = r(t,\mu) - k(t).\end{aligned}$$

再证(2.1)是方程(2.2)的唯一解.

若 $r_1(t,\mu) = k(t) + \mu(a*r_1)(t),\ \forall\ t \in [0,\ T]$. 则由(2.3),对 $t \in [0,\ T]$,我们得到

$$\begin{aligned}r(t,\mu) &= k(t) + (k*q)(t) \\ &= r_1(t,\mu) - \mu(a*r_1)(t) + q*[r_1(t,\mu) - \mu(a*r_1)](t) \\ &= r_1(t,\mu) - \mu(a*r_1)(t) + (q*r_1)(t) - \mu(q*a*r_1)(t) \\ &= r_1(t,\mu) - \mu(a*r_1)(t) + (q*r_1)(t) - (q*r_1)(t) + \mu(a*r_1)(t) \\ &= r_1(t,\mu).\end{aligned}$$

下面的引理在后面的证明中将起关键的作用.

引理 2.2 对 $t \geqslant 0$ 和固定的 $\mu \in \mathbf{C}$,则

$$B(t,\mu) = \int_0^t q(t-s,\mu)R(s)x\mathrm{d}s, \quad \forall\ x \in X, \tag{2.4}$$

定义了一个 X 上的有界线性算子,且有

$$(\mu I - A)B(t,\mu)x = \mu\{r(t,\mu)x - R(t)x\}, \text{对一切 } x \in X \text{ 成立}; \tag{2.5}$$

和 $$B(t,\mu)(\mu I - A)x = \mu\{r(t,\mu)x - R(t)x\}, \text{对一切 } x \in \mathscr{D}(A) \text{ 成立}. \tag{2.6}$$

证明 显然对 $t \geqslant 0$ 和固定的 $\mu \in \mathbf{C}$,由(2.3)知 $B(t,\mu) \in B(X)$,且对一切 $x \in \mathscr{D}(A)$,由(2.1),(2.3)式,得

$$\begin{aligned}
B(t,\mu)(\mu I - A)x &= \mu\int_0^t q(t-s,\mu)R(s)x\mathrm{d}s - \int_0^t q(t-s,\mu)R(s)Ax\mathrm{d}s \\
&= \mu\int_0^t q(t-s,\mu)k(s)\mathrm{d}s + \mu\int_0^t\int_0^s q(t-s,\mu)a(s-v)AR(v)x\mathrm{d}s - \int_0^t q(t-v,\mu)R(v)Ax\mathrm{d}v \\
&= \mu\int_0^t k(t-s)q(s,\mu)x\mathrm{d}s + \mu\int_0^t\int_v^t q(t-s,\mu)a(s-v)AR(v)x\mathrm{d}s\mathrm{d}v - \int_0^t q(t-v,\mu)AR(v)x\mathrm{d}v \\
&= \mu\{r(t,\mu)x - k(t)x\} + \int_0^t\{\mu\int_0^{t-v} q(s,\mu)a(t-v-s)\mathrm{d}s - q(t-v,\mu)\}AR(v)x\mathrm{d}v \\
&= \mu\{r(t,\mu)x - k(t)x\} - \mu\int_0^t a(t-v)AR(v)x\mathrm{d}v \\
&= \mu\{r(t,\mu)x - k(t)x - R(t)x + K(t)x\} = \mu\{r(t,\mu)x - R(t)x\}.
\end{aligned}$$

这意味着(2.6)式成立.

由于 A 是闭的及 $R(t)A \subset AR(t)$ 知(2.5)对所有的 $x \in \mathscr{D}(A)$ 成立.对 $x \in X$,∃ $\{x_n\} \subset \mathscr{D}(A)$ 使得 $x_n \to x\ (n \to \infty)$. 故 $B(t,\mu)x_n \to B(t,\mu)x\ (n \to \infty)$. 又由(2.5)对所有 $x \in \mathscr{D}(A)$ 成立知 $AB(t,\mu)x_n$ 收敛. 由 A 的闭性知(2.5)对任意 $x \in X$ 成立.

下面定理是本文的主要结果之一.

定理 2.3 设 $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是由 A 生成的指数有界的 k-正则预解算子族,则有

$$r(t,\sigma(A)) \subset \sigma(R(t)) \tag{2.7}$$

证明 设 $\mu \in \rho(R(t))$,$Q = \{\mu[r(t,\mu) - R(t)]\}^{-1}$. 显然,由(2.4)定义的算子 $B(t,\mu)$ 和 Q 可交换. 由(2.5)和(2.6)式可知 $(\mu I - A)B(t,\mu)Qx = x$, 对一切 $x \in X$ 成立;和 $QB(t,\mu)(\mu I - A)x = x$, 对一切 $x \in \mathscr{D}(A)$ 成立.

因此 $\mu \in \rho(A)$,$B(t,\mu)Q = (\mu I - A)^{-1} = R(\mu;A)$,且 $\rho(R(t)) \subset r(t,\rho(A))$,由此即得(2.7)式成立.

显然在定理2.3.中,如果取 $k(t) \equiv 1$ 或 $\dfrac{t^n}{n!}$, $a(t) \equiv 1$ 或 t,则分别获得预解算子族,n 次积分半群,n 次积分余弦函数,C_0-半群,强连续余弦算子函数的相应结果[4~7].

推论 2.4 (a)设 A 生成指数有界的预解算子族 $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$,则有 $r(t,\sigma(A)) \subset \sigma(R(t))$,这里 $r(t,\mu) = 1 + \int_0^t q(s,\mu)\mathrm{d}s, \forall\, t \in [0, T]$.

(b)设 A 生成指数有界的 n 次积分半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$,则

$$\{\lambda^{-n}e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!\,\lambda^{k-n}};\ \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(S(t)).$$

(c)设 A 生成指数有界的 $2n$ 次积分余弦函数 $\{C_{2n}(t)\}_{t\geqslant 0}$,则

$$\{\lambda^{-n}Ch(t\sqrt{\lambda}) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{2k}}{(2k)!\,\lambda^{k-n}};\ \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(C_{2n}(t)).$$

(d)设 A 是 C_0-半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元,则 $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t))$, $t \geqslant 0$.

(e)设 A 是强连续余弦算子函数 $\{C(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的无穷小生成元,则 $Ch(t\sigma(A)^{1/2}) \subset \sigma(C(t))$.

如果 $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是以 T 为周期的指数有界的 k-正则预解算子族,那么 $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是一致有界的. 令 $f(\mu) = 1/\hat{a}(\mu)$,$\mathrm{Re}\mu > \omega$. 对固定的 $T \geqslant 0$ 且满足以下条件:

(H_1) $\quad \forall\, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0, I_n = \lim\limits_{\mu \to 2\pi n/T} f(\mu) \quad (I_n \in \mathbf{C})$, 且$\lim\limits_{\mu \to 0} f(\mu) = 0$.

定义集合

$$\pi_k(T) = \{\mu \in \mathbf{C},\ r(t,\mu) = r(t+T,\mu), t \geqslant 0\}.$$

则由(2.1)式可知 $k(t) = k(t+T), t \geqslant 0$.

定理 2.5 设 A 是 X 中的闭稠定线形算子, $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是由 A 生成的指数有界 k-正则预解算子族,又假设 $k(t)$ 是具有周期 T 的周期函数且 (H_1) 成立,则以下条件是等价的:

(a) $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是以 T 为周期的函数.

(b) $\sigma_p(A) \subset \pi_k(T)$,且 A 的特征向量充满整个空间 X.

证明 (b)⇒(a). 设 $\mathbf{E}$ 表示 A 的特征向量的集合. 对 $\forall\, x \in \mathbf{E}$,则 $\exists\, \mu \in \mathbf{C}$,使得 $Ax = \mu x$. 从而 $\mu \in \sigma_p(A)$, 又由(b)可知 $\mu \in \pi_k(T)$,故 $r(t,\mu)$ $(t \geqslant 0)$ 是以 T 为周期的函数.

若 $\mu = 0$,则 $R(t)x = k(t)x = r(t,0)x$, $\forall\, t \geqslant 0$,从而对 $\forall\, x \in X$ 和 $t \geqslant 0$, $R(t)x = R(t+T)x$. 若 $\mu \neq 0$,则由引理 2.2. 知 $R(t)x = r(t,\mu)x$、故对 $x \in \mathbf{E}$ 和 $t \geqslant 0$, $R(t)x = R(t+T)x$. 从而由(b)及 $R(t) \in B(X)$ 知对 $x \in X$ 和 $t \geqslant 0$, $R(t)x = R(t+T)x$.

(a)⇒(b). 设 $\mu \in \sigma_p(A)$,则 $\exists\, x \in X$ 且 $x \neq 0$,使 $(\mu I - A)x = 0$. 由引理2.2.知

$$\mu\{r(t,\mu)x - R(t)x\} = 0 \tag{2.8}$$

若 $\mu = 0$,则由(2.1)式知 $r(t,0) = k(t)$ $(t \geqslant 0)$,因此 $\mu \in \pi_k(T)$. 若 $\mu \neq 0$,则由(2.8)式及(a)知 $\mu \in \pi_k(T)$,从而 $\sigma_p(A) \subset \pi_k(T)$.

下证 A 的特征向量集合充满整个空间 X.

对 $\mathrm{Re}\mu > \omega$,由引理1.3.,有

$$\hat{k}(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\mu s} R(s)x\mathrm{d}s, \quad \forall\, x \in X.$$

由 $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是具有周期 T 的周期函数,则由上式可得

$$\hat{k}(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}x = \{1/(1 - e^{-\mu T})\}\int_0^T e^{-\mu s} R(s)x\mathrm{d}s, \quad \forall\, x \in X. \tag{2.9}$$

取 $\mu_n = 2\pi\, in/T, n \in \mathbf{Z}$. 考虑 $R(t)$ 的 Fourier 系数

$$P_n x = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\mu_n s} R(s)x\mathrm{d}s \neq 0.$$

由于函数 $\mu \to \int_0^T e^{-\mu s} R(s)\mathrm{d}s$ 在 $\mathbf{C}$ 上解析,则由(2.9)式知 $\hat{k}(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}$ 可延拓为具极点 μ_n 的亚纯函数,且由(2.9)式易知

$$\lim_{\mu \to \mu_n}(\mu - \mu_n)\hat{k}(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}x = P_n x, \quad \forall\, x \in X \text{ 和 } n \in \mathbf{Z}. \tag{2.10}$$

对 $\mathrm{Re}\mu > \omega, x \in X$,

$$\begin{aligned}&(I_n - A)(\mu - \mu_n)\hat{k}(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}x \\ &= (\mu - \mu_n)\hat{k}(\mu)f(\mu) + (I_n - f(\mu))(\mu - \mu_n)\hat{k}(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}; \\ &A\mu\,\hat{k}(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}x = \mu\hat{k}(\mu)f(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}x - \mu\hat{k}(\mu)f(\mu)x.\end{aligned}$$

由(2.10)及假设 (H_1) 知,

$$\lim_{\mu \to \mu_n}(I_n - A)(\mu - \mu_n)\hat{k}(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}x = 0, \quad \forall\, n \neq 0,$$

$$\lim_{\mu \to 0} A\mu\,\hat{k}(\mu)(I - \hat{a}(\mu)A)^{-1}x = 0, \ \forall\, n = 0.$$

因此由 A 的闭性及(2.10)式知 $P_n x \in \mathscr{D}(A)$ $(n \in \mathbf{Z})$ 且

$$(I_n - A)P_n x = 0, \quad \forall\, n \neq 0, \text{和 } AP_0 x = 0, \quad \forall\, n = 0.$$

假设 A 的特征向量不充满整个空间 X,则存在 $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$,使得 $\forall\, x \in \mathbf{E}$, $\langle x^*, x\rangle = 0$, 又对每一 $n \in \mathbf{Z}$, $x \in X$, $P_n x = 0$ 或属于 $\mathbf{E}$,此时都有 $\langle x^*, P_n x\rangle = 0$. 由于数值函数 $t \to \langle x^*,$

$R(t)x\rangle$ 的 Fourier 系数均为零,从而 $\langle x^*, R(t)x\rangle = 0$. 特别地,当 $t=0$ 时, $\langle x^*, k(0)x\rangle = k(0)\langle x^*, x\rangle = 0$. 由 X 的任意性知, $x^* = 0$. 这与假设矛盾. 故(b)成立.

在定理(2.5)中,若取 $k(t) = 1, r(t,\mu) = 1 + \int_0^t q(s,\mu)\mathrm{d}s$, 则获得下面的结论[3].

推论 2.6 设 A 是 X 中的闭稠定线性算子, $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是由 A 生成的指数有界的预解算子族. 又假设(H_1)成立,则以下两个条件是等价的.

(a) $\{R(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是以 T 为周期的函数.

(b) $\sigma_p(A) \subset \pi_k(T)$ 且 A 的特征向量充满整个空间 X.

推论 2.7[8,9] (a) $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是以 2π 为周期的 C_0-半群的充要条件是它的无穷小生成元 A 的特征向量充满整个空间 X 且 $\sigma_p(A) \subset i\mathbf{Z}$.

(b) $\{C(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是以 2π 为周期的强连续余弦函数的充要条件是它的无穷小生成元 A 的特征向量充满整个空间 X 且 $\sigma_p(A) \subset -\mathbf{N}_0^2$.

参考文献:

[1] LIZAMA C. Regularized solutions for Volterra equations[J]. J Math Anal Appl, 2000, 243: 278-292.

[2] DA PRATO G, IANNELLI M. Linear integro-differential equation in Banach space[J]. Rend Sem Math Padova, 1980, 62: 207-219.

[3] LIZAMA C. A characterization of periodic resolvent operators[J]. Results Math, 1990, 18: 93-105.

[4] GREINER G, MULLER M. The Spectral Mapping Theorem for Integrated Semigroup[J]. Semigroup Forum, 1993, 47: 115-122.

[5] LIZAMA C. The Spectral Mapping Theorem for Integrated Consine functions[M]. Partial Differential Equations; Models in Physics and Biology; Mathematical Reasearch, 82, Akademieberlay, Berlin, 1994, 89-103.

[6] HILLE E, PHILLIPS R. Functional Analysis and Semigroups[M]. Amer Math Soc Colloq Publ, 31, Amer Math Soc Providence, R I, 1957.

[7] NAGY B. On cosine operator functions in Banach Spaces[J]. Actasci Math Szeged, 1974, 36: 281-289.

[8] BART H. Periodic Strongly continuous Semigroups[J]. Ann Math Purae Appl, 1977, 115: 311-318.

[9] LUTZ D. Periodische operatorwertige cosinus functionen[J]. Resultate Math, 1981, 4: 75-83.

Spectral Mapping Theorems of K-Regularized Resolvent Operator Families

ZHANG Jizhou, YIN Dan

(Mathematics & Science College, Shanghai Teachers University, Shanghai 200234, China)

Abstract: Let $k \in C(\mathbf{R}^+)$, A be a closed linear densely defined operator in the Banach space X and $\{\mathbf{R}(t)\}_{t\geqslant 0}$ be an exponentially bounded k-regularized resolvent operator family generated by A. We prove some relations between the spectrum of the generator A and that of $\{\mathbf{R}(t)\}_{t\geqslant 0}$. In addition, the corresponding results of resolvent operator family, integrated semigroup, integrated cosine function, C_0-semigroup, and strong cosine function are obtained.

Key words: k-regularized resolvent operator family; resolvent operator family; integrated semigroup; C_0-semigroup; spectrum