

文章编号:1001-9081(2006)08-1799-03

MIMO 系统各态历经信道容量的分析与仿真

贺中堂¹, 张力军¹, 陈自力²

(1. 南京邮电大学 通信与信息工程学院, 江苏 南京 210003;

2. 徐州空军学院 电工电子教研室, 江苏 徐州 221000)

(hezta@163.com)

摘要:以信息论的观点为基础,在假设信道状态信息仅收端已知的情况下,采用等功率发射方案,研究了瑞利衰落信道下 MIMO(多输入多输出)系统各态历经信道容量,推导了三种特殊 MIMO 信道的各态历经信道容量表达式,以及在小信噪比下等收发天线 MIMO 系统的容量近似公式,并通过仿真进行了验证,仿真结果表明该近似公式比较精确。

关键词:多输入多输出;各态历经信道容量;Wishart 分布函数;Gamma 函数

中图分类号: TP393.03 **文献标识码:** A

Analysis and simulations for ergodic capacity channel of MIMO systems

HE Zhong-tang¹, ZHANG Li-jun¹, CHEN Zi-li²

(1. School of Communication and Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing Jiangsu 210003, China;

2. Electrical and Electronic Teaching and Researching Offices, Xuzhou Airforce College, Xuzhou Jiangsu 221000, China)

Abstract: Under the assumption that the channel state information was available only at the receiver, the capacity of MIMO systems in Rayleigh fading channel was investigated on the basis of information theory. Three special expressions for the MIMO capacity over ergodic flat fading channel were derived. An asymptotic formula for MIMO systems with equal number of transmit and receive antennas in small SNR was also given. Simulation results show that this approximation is relatively accurate.

Key words: MIMO; ergodic channel capacity; Wishart distribution function; Gamma function

0 引言

采用 MIMO(多输入多输出)的无线通信系统可以带来比 SISO(单发单收)系统更多的优点,比如增加通信系统容量、提高频谱利用效率,下一代(4G)无线移动通信已考虑在移动台和基站设置多个收发天线。因此利用信息论的观点来研究 MIMO 信道,特别是所能提供的最高数据传输率,对于研究如何才能达到这些极限容量具有重大的理论指导意义。

信道容量定义为以任意小的误差概率能够传输的最高数据速率,文献[1]假定接收机已知信道状态信息(Channel State Information, CSI)而发射机未知,每个发射天线采用等功率分配,在独立同分布瑞利衰落信道下,研究了 MIMO 系统各态历经(平均)信道容量,利用 Laguerre 多项式,以积分的形式给出各态历经信道容量的表达式;文献[2~4,8]分别在某些情况下(如小信噪比或大信噪比下),推导出了各态历经信道容量的近似公式,最近文献[5,6]给出了该容量表达式的闭式解,所有这些结果都比较复杂,计算量也比较大。

本文将文献[1]的结果进行扩展,通过仿真给出了在一定信噪比下信道容量与收发天线间的关系曲线,利用 Laguerre 多项式的特殊值,推导出在 SIMO 和 MISO 情况下各态历经信道容量的闭式公式;并进一步在小信噪比下,推导出等收发天线 MIMO 系统的容量近似公式。该公式表达简洁,

且仿真结果表明它与实际容量基本符合,特别是在小信噪比下条件下,该公式优于目前已知结果。

1 MIMO 系统信道模型

考虑一个单用户 MIMO 无线通信系统,具有 t 个发射天线, r 个接收天线,假定系统为离散时间的复基带线性模型,每个符号周期的发射信号 x 为 $t \times 1$ 的复向量,其中 x_i 表示由发射天线 i 发射的信号,并假定发射信号的总功率受限,即:

$$E[x^H x] = \text{tr}(E[xx^H]) = P \quad (1)$$

其中 a^H 复共轭转置, $\text{tr}(\cdot)$ 表示矩阵 A 的迹。接收信号 y 为 $r \times 1$ 的复向量,可以表示为:

$$y = Hx + n \quad (2)$$

H 为 $r \times t$ 维的复信道增益矩阵,其第 (i, j) 个元素 H_{ij} 表示第 j 个发射天线与第 i 个接收天线间的信道衰落系数,为独立同分布复高斯变量,均值为 0, 方差为 1, 即 $H_{ij} \in CN(0, 1)$ 。 n 为 $r \times 1$ 维相互独立的循环对称复高斯噪声向量,其均值为 0, 协方差矩阵 R_n 为:

$$R_n = E[nn^H] = \sigma_n^2 I_r \quad (3)$$

因此每个接收天线的平均信噪比 $\rho = P/\sigma_n^2$, 并假定信道矩阵 H 收端已知, 而发射机未知。

2 各态历经信道容量

由信道矩阵的假设条件,满足总功率受限,随机 MIMO 系

收稿日期:2006-03-06;修订日期:2006-04-29

作者简介:贺中堂(1971-),男,江苏丰县人,讲师,博士研究生,主要研究方向:通信信号处理、空时信号处理; 张力军(1942-),男,浙江苍南人,教授,博士生导师,主要研究方向:宽带数字信号处理、移动计算; 陈自力(1956-),男,浙江上虞人,副教授,主要研究方向:下一代无线数字通、通信信号处理。

统的信道容量为^[1]:

$$C = E_H \left\{ \ln \det \left(I_r + \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^H \right) \right\} \quad (4)$$

其中 \mathbf{Q} 为 x 的协方差矩阵, $\mathbf{Q} = E[xx^H]$, 当发端未知信道状态信息时, 采用等功率分配为最优的发送方案, 其发送协方差矩阵 \mathbf{Q} 为:

$$\mathbf{Q} = \frac{\rho}{t} I_t \quad (5)$$

因此其各态历经(平均)信道容量为:

$$\begin{aligned} C &= E_H \left\{ \ln \det \left(I_r + \frac{\rho}{t} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right\} \\ &= E_H \left\{ \ln \det \left(I_t + \frac{\rho}{t} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

这里利用了 $\det(I+AB) = \det(I+BA)$, $\det(\cdot)$ 表示矩阵的行列式值。式(6)可以通过统计仿真进行评价, 为了说明各态历经信道容量随发射天线和接收天线个数的变化情况, 在信噪比 $\rho = 10\text{dB}$ 和 20dB 时分别进行了仿真。仿真时每个信噪比下, 每对收发天线对信道矩阵采用 10000 次实现, 分别利用(6)式求其平均值得到各态历经信道容量, 如图 1 所示。

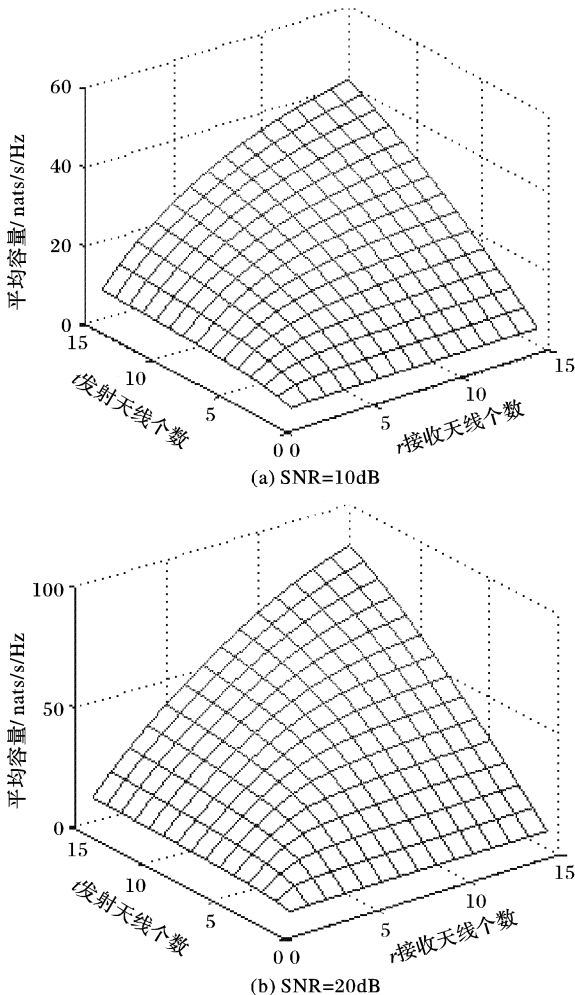


图 1 不同信噪比下平均容量随收发天线个数的变化

利用仿真的方法, 在天线数大时, 其计算量非常大, 下面利用数值分析的方法对平均容量进行推导。由文献[1]定义:

$$\mathbf{W} = \begin{cases} \mathbf{H} \mathbf{H}^H & r < t \\ \mathbf{H}^H \mathbf{H} & r \geq t \end{cases} \quad (7)$$

令 $n = \max(r, t)$, $m = \min(r, t)$, 因此 \mathbf{W} 是一个 $m \times m$ 的随机非负正定矩阵, 具有非负特征值, 将(6)式写为 \mathbf{W} 的特征

值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 的形式:

$$C = E_H \left[\sum_{i=1}^m \ln \left(1 + \frac{\rho}{t} \lambda_i \right) \right] \quad (8)$$

由文献[1,3] 方程(8) 可以写为:

$$C = \int_0^\infty \ln \left(1 + \frac{\rho}{t} \lambda \right) \times \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k!}{(k+n-m)!} [L_k^{n-m}(\lambda)]^2 \lambda^{n-m} e^{-\lambda} d\lambda \quad (9)$$

其中 $L_k^{n-m}(\lambda)$ 为 k 阶 Laguerre 多项式:

$$L_k^{n-m}(\lambda) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{(k+n-m)!}{(k-l)!(n-m+l)! l!} \lambda^l \quad (10)$$

式(10)的解析解很难求得, 但在某些情况下, 若利用 $L_k^{n-m}(\lambda)$ 的特殊值, 可以求得其闭式解。下面推导三种典型的 MIMO 信道容量的表达式及近似式。

3 SIMO 和 MISO 系统的容量

3.1 SIMO 信道容量

对 SIMO 系统具有 1 个发送天线, $r \geq 1$ 个接收天线, 即存在接收分集时, 其信道容量由(9) 式可知, 这里 $m = \min(r, 1) = 1$, $n = \max(r, 1) = r$ 。

$$C_{\text{simo}} = \int_0^\infty \ln(1 + \rho\lambda) \frac{1}{(r-1)!} [L_0^{r-1}(\lambda)]^2 \lambda^{r-1} e^{-\lambda} d\lambda \quad (11)$$

由(10) 式, 当 $k = 0$ 时, $L_0^{r-1}(\lambda) = 1$, 因此(11) 式可写为:

$$C_{\text{simo}} = \int_0^\infty \ln(1 + \rho\lambda) \frac{1}{(r-1)!} \lambda^{r-1} e^{-\lambda} d\lambda \quad (12)$$

由文献[5,6]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln(1+x) x^{n-1} e^{-\mu x} dx &= (n-1)! e^\mu \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(-n+j, \mu)}{\mu^j} \\ &= \Gamma'(n) e^\mu \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(-n+j, \mu)}{\mu^j} \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $\Gamma(\alpha, z)$ 为补充不完备的 gamma 函数, 定义为:

$$\Gamma(\alpha, z) = \int_z^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (14)$$

$\Gamma'(z)$ 为 Gamma 函数, 定义为:

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad (15)$$

因此(12) 式可以写为:

$$\begin{aligned} C_{\text{simo}} &= \int_0^\infty \ln(1 + \rho\lambda) \frac{1}{(r-1)!} \lambda^{r-1} e^{-\lambda} d\lambda \xrightarrow{\lambda = x/\rho} \\ &= e^{1/\rho} \sum_{j=0}^{r-1} Ei \left(j+1, \frac{1}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

因此由式(16) 可以推出, 当 $r = 1$ 时, 即对应单个发射天线单个接收天线的情况, 其各态历经的信道容量公式为 $e^{1/\rho} Ei \left(1, \frac{1}{\rho} \right)$; 同时也可以得到, 在信噪比相同的情况下, 每增加一个接收天线, 即由 $r-1$ 增加到 r 时, SIMO 系统的信道容量增加 $e^{1/\rho} Ei \left(r, \frac{1}{\rho} \right) \text{ nats}$, 从而从根本上弄清楚了对 SIMO 系统每增加一个接收天线, 各态历经信道容量增加量的确切数值。当接收天线增大时, 其容量趋于一个渐近值:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} C_{\text{simo}} = \ln(1 + \rho) \quad (17)$$

3.2 MISO 信道容量

对 MIMO 系统具有 $t \geq 1$ 个发送天线, 1 个接收天线, 即存在

发射分集时,其信道容量由(9)式可知,这里 $m = \min(t, 1) = 1$, $n = \max(t, 1) = t$; 同样这里 $k = 0, L_0^{-1}(\lambda) = 1$, 因此(17)式可写为:

$$C_{miso} = \int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{\rho}{t}\lambda\right) \frac{1}{(t-1)!} \lambda^{t-1} e^{-\lambda} d\lambda \quad (18)$$

利用上面的推导方法,可以求得:

$$C_{miso} = e^{t/\rho} \sum_{j=0}^{t-1} Ei\left(j+1, \frac{t}{\rho}\right) \quad (19)$$

由此可得当发射天线由 $t-1$ 增加到 t 时,其容量增加 $e^{t/\rho} Ei\left(t, \frac{t}{\rho}\right)$ nats; 当发射天线数加大时,其信道容量趋于一个常数:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_{miso} = \ln(1 + \rho) \quad (20)$$

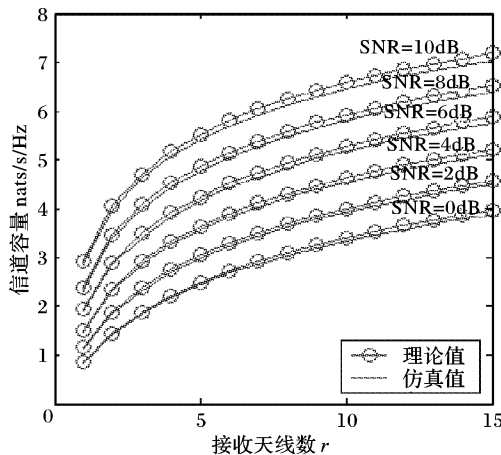


图2 不同信噪比下 SIMO 容量对比

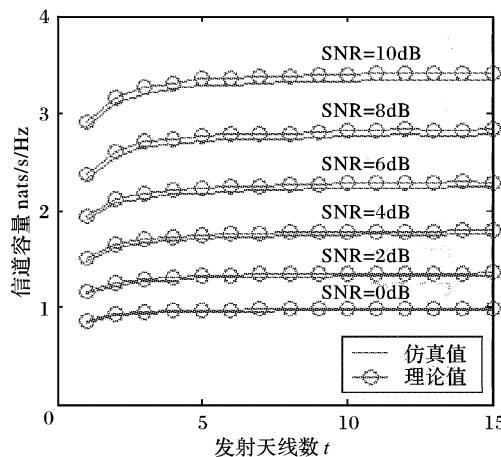


图3 不同信噪比下 MISO 容量对比

图2和图3分别对比了采用式(16)和式(19)计算的SIMO和MISO系统,不同信噪比、不同接收天线或不同发射天线,各态历经的信道容量的理论值与计算机仿真得到的平均信道容量的对比。结果表明,理论值与仿真值非常吻合,从而证明了结果的正确性。

4 等收发天线时系统的容量

当发射天线与接收天线相等时,即 $r = t$,若采用(9)式进行计算,由于 $L_k^0(\lambda)$ 没有特殊解,因此很难得到这种情况下MIMO系统各态历经信道容量闭式公式,下面推导(9)式的一个近似公式。

文献[1,3,4]利用随机矩阵理论,推导出了等收发天线下,MIMO系统各态历经信道容量的渐近表达式:

$$C_{eqt} \rightarrow \frac{r}{\pi} \int_0^1 \log_2(1 + \rho v) \sqrt{\frac{1}{v} - \frac{1}{4}} dv \text{ bit/s/Hz} \quad (21)$$

该积分表达式将涉及到对数函数的积分计算,比较复杂,不容易得到闭式解,下面我们将进行进一步的简化,利用在小信噪比条件下, $\log_2(1+x) \approx \sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 10$), 因此(21)式可以写为:

$$\begin{aligned} C_{eqt} &\rightarrow \frac{r}{\pi} \int_0^1 \log_2(1 + \rho v) \sqrt{\frac{1}{v} - \frac{1}{4}} dv \\ &\approx \frac{r}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\rho v} \sqrt{\frac{1}{v} - \frac{1}{4}} dv \\ &= \frac{8r}{3\pi} \sqrt{\rho} \text{ bit/s/Hz} \end{aligned} \quad (22)$$

从而可以得到在小信噪比条件下,发射天线与接收天线相等时MIMO系统的信道容量闭式渐近解。最近文献[7],又给出了在大信噪比条件下的MIMO系统的渐近公式;可以作为本文的补充:

$$C_{EQRT} \sim r \log_2(e) (\ln \rho - 1) \text{ bit/s/Hz} \quad (23)$$

图4对比了不同信噪比下,采用(22)式计算的等收发天线MIMO系统各态历经信道容量,与计算机仿真结果对比表明,采用(22)式的计算值在信噪比 $\rho \leq 10$ dB 时与计算机仿真结果的误差 $< 3\%$, 是一个比较实用的近似公式。图5对比了采用(23)式的计算值与仿真值,可以看出,采用(23)式在信噪比 $\rho > 20$ dB 时计算值与仿真值比较吻合,而 $\rho < 20$ dB 时,误差比较大(如图5中15dB时)。

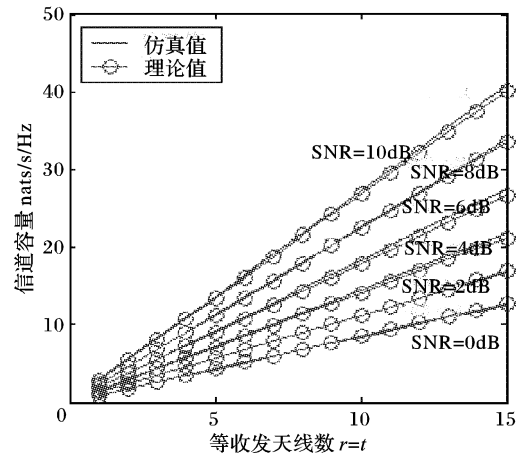


图4 小信噪比下等收发天线系统容量对比

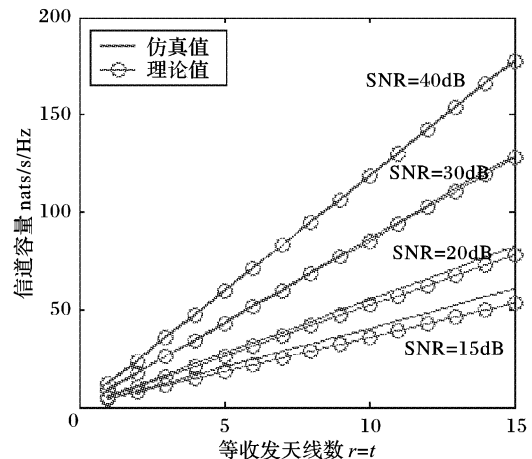


图5 大信噪比下等收发天线系统容量对比

同的概率 P_{low} 建立安全链路。以 $m = 200, P_{low} = 0.33$ 为例, 其安全性能比较如图 3 所示。HR 协议在不同散列度下的计算负载如图 4 所示。

由图 3、图 4 可以看出, 与 EG 协议相比, 只需数次散列运算为代价, HR 协议取得更好的安全性能。在很小的散列度 ($t = 8$) 条件下, 对于基本模式、 $q = 1$ 、 $q = 2$ 、 $q = 3$ 模式, 分别平均将安全链路被破解概率降低到 82.3%、81.8%、70.1%、63.2%。各个模式之间, 如果敌人捕获很少的节点, q 复合模式比基本模式表现出更好的安全性能; 但是随着被捕节点的增多, q 越大, 性能越差。这是因为 q 越大, 为达到同样的 P_{low} , S 就越小; 而捕获的节点一多, 就更容易恢复出 S 的内容。同时大的 q 会增大计算负载。散列度 t 越大, 计算负载越大, 但是安全性能只能取得很小的提高。所以综合起来, 取小散列度 t (例如 8) 的 HR 协议 $q = 1$ 模式的性能最好。

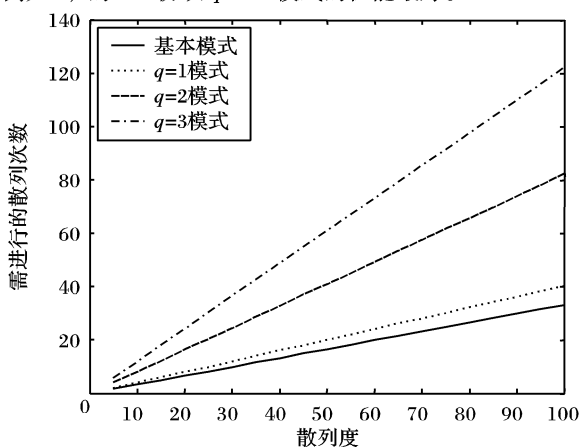


图 4 HR 协议计算负载 ($m = 200, P_{low} = 0.33$)

5 结语

密钥分配协议是传感器网络安全的热点研究问题。本文主要提出了一种新的多重单向散列随机密钥预分配协议, 只

要求每个节点能进行单向散列操作, 非常适合传感器网络。全面的分析表明, 与现有协议相比, 只需要很小的计算负载为代价, 就可以较好地提高安全性能。

参考文献:

- [1] ZHU S, SETIA S, JAJODIA S. LEAP: efficient security mechanisms for large-scale distributed sensor networks [A]. Proceedings of the 10th ACM conference on Computer and Communication Security (CCS'03) [C]. Washington DC, 2003.
- [2] AKYILDIZ IF, SU W, SANKARASUBRAMANIAM Y, et al. A survey on sensor networks [J]. IEEE Communications Magazine, 2002, 40(8): 102-114.
- [3] ESCHENAUER L, GLIGOR VD. A key-management scheme for distributed sensor networks [A]. Proceedings of the 9th ACM conference on Computer and Communications Security [C]. Washington, DC, 2002.
- [4] SPENCER J. The Strange Logic of Random Graphs [M]. Number 22 in Algorithms and Combinatorics, Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [5] CHAN H, PERRIG A, SONG D. Random key predistribution schemes for sensor networks [A]. Proceedings of the IEEE Computer Society Symposium on Research in Security and Privacy [C]. Berkeley, CA, USA, 2003.
- [6] DU W, DENG J, HAN YS, et al. A Pairwise Key Pre-distribution Scheme for Wireless Sensor Networks [J]. ACM Transactions on Information and System Security, 2005, 8(2): 228-258.
- [7] LIU DC, NING P, LI RF. Establishing Pairwise Keys in Distributed Sensor Networks [J]. ACM Transactions on Information and System Security, 2005, 8(2): 41-77.
- [8] LEIGHTON T, MICALI S. Secret-Key Agreement without Public-Key Cryptography [A]. Proceedings of the 13th Annual International Cryptology Conference on Advances in Cryptology [C]. Santa Barbara, California, USA, 1993.
- [9] ZHU S, XU S, SETIA S, et al. Establishing Pairwise Keys for Secure Communication in Ad Hoc Networks: A Probabilistic Approach [A]. Proceedings of the 11th IEEE International Conference on Network Protocols [C]. 2003.

(上接第 1801 页)

5 结语

本文从信息论的角度研究 MIMO 系统各态历经信道容量, 在瑞利衰落信道下, 当输入为循环对称复高斯向量, 且发射天线采用等功率分配条件, 并假定接收机已知信道状态信息, 而发射机未知时, MIMO 系统信道容量的公式, 并进行了仿真, 得到了不同信噪比下各态历经信道容量与收发天线间的关系图; 以此为基础, 利用 Laguerre 多项式 ($L_k^{n-m}(\lambda)$) 在 $k = 0$ 时的特殊值, 分别详细推导了 SIMO 和 MISO 系统的各态历经信道容量的公式, 当收发天线数为有限数时, SIMO 和 MISO 系统的容量可以表示为有限个指数积分和的形式, 从而弄清楚了对以上两个系统每增加一个接收天线或一个发射天线, 其信道容量增加量的确切数值, 为系统设计提供了理论基础; 对于等收发天线的 MIMO 系统各态历经信道容量, 在小信噪比下, 本文给出了一个比较精确简洁的近似公式, 并介绍了文献 [1] 中大信噪比下的一个近似公式作为补充。大量仿真结果表明, 采用本文给出的三种典型 MIMO 系统的各态历经信道容量公式及近似公式, 其理论计算结果与仿真值比较吻合。

参考文献:

- [1] TELATAR IE. Capacity of multi-antenna Gaussian channels [J]. Eu-

ropean Transactions on Telecommunications, 1999, 10(6): 586-595.

- [2] DOHLER M, AGHVA H. On the Approximation of MIMO Capacity [J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2005, 4(1): 30-34.
- [3] DOHLER M, AGHVA H. A closed Form Expression of MIMO capacity over Ergodic Narrowband Channels [J]. IEEE Communications Letter, 2004, 8(6): 365-367.
- [4] SHIN H, LEE H. Closed-form Formulas for Ergodic Capacity of MIMO Rayleigh Fading Channels [A]. IEEE ICC [C]. 2003. 2996-3000.
- [5] SHIN H, LEE JH. On the Capacity of MIMO Wireless Channels [J]. IEICE Transactions on Communications, 2004, E87-B(3).
- [6] ALOUINI M, GOLDSMITH J. Capacity of Rayleigh fading channels under different adaptive transmission and diversity-combining techniques [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 1999, 48(4).
- [7] KHAN E, HENECHAN C. A Closed Form Expression for the Ergodic Capacity of MIMO Systems [J]. Информационные Том 5, 2005, (1): 47-57.
- [8] 王超, 李治安, 吴德伟, 等. 两种典型的 MIMO 系统信道容量分析与仿真 [J]. 电子学报, 2004, 32(12).