问题讨论

# 一种从 LQR 理论设计容错 MIMO系统方法的非普适性

黄 献 青
(华中理工大学自动控制工程系 武汉 430074)

**关键词** MIMO 系统，容错控制，LQR 理论。

## 1 引言

对于 MIMO 系统的容错控制，已有许多的研究[1,2]。文[3]提出一种从 LQR 理论出发设计稳定容错MIMO控制系统的方法，并从理论上证明了通过适当选取权矩阵$Q$或$R$，可以构造在稳定性意义上对执行器或传感器的失效具有容错性能的状态反馈系统。设计思想新颖，方法简单，对系统的要求也不高。但是，文中关键性的定理 3 的证明出现了疏忽，致使结论不成立。

## 2 文[3]结果简述

考虑系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

式中状态 $x(t) \in R^n$，输入 $u(t) \in R^m$，且 $\{A, B\}$ 可控。系统采用如下的状态反馈：

$$u = L_i u_c, \quad u_c = r - kx.$$

其中 $L_i = \mathrm{diag}(l_1, l_2, \cdots, l_m)$ 是执行器故障矩阵，$l_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 的取值情况是

$$\begin{cases} l_j = 1, & \text{当执行器 } j \text{ 正常时}, \\ l_j = 0, & \text{当执行器 } j \text{ 失效时}. \end{cases}$$

参见图 1。

设执行器的故障共有 $N + 1 (\leqslant 2^m - 1)$ 种组合模式，记为 $F = \{L_0, L_1, \cdots, L_N\}$。文[3]的结论如下：

适当选取权矩阵 $Q, R$，均存在一个在稳定性意义上的容错状态反馈控制律。即对于任一执行器故障矩阵 $L_i \in F$，均有

$$\mathrm{Re}\lambda(A - BL_i R^{-1} B^{\mathrm{T}} P) < -2,$$

本文于 1993 年 11月10 日收到

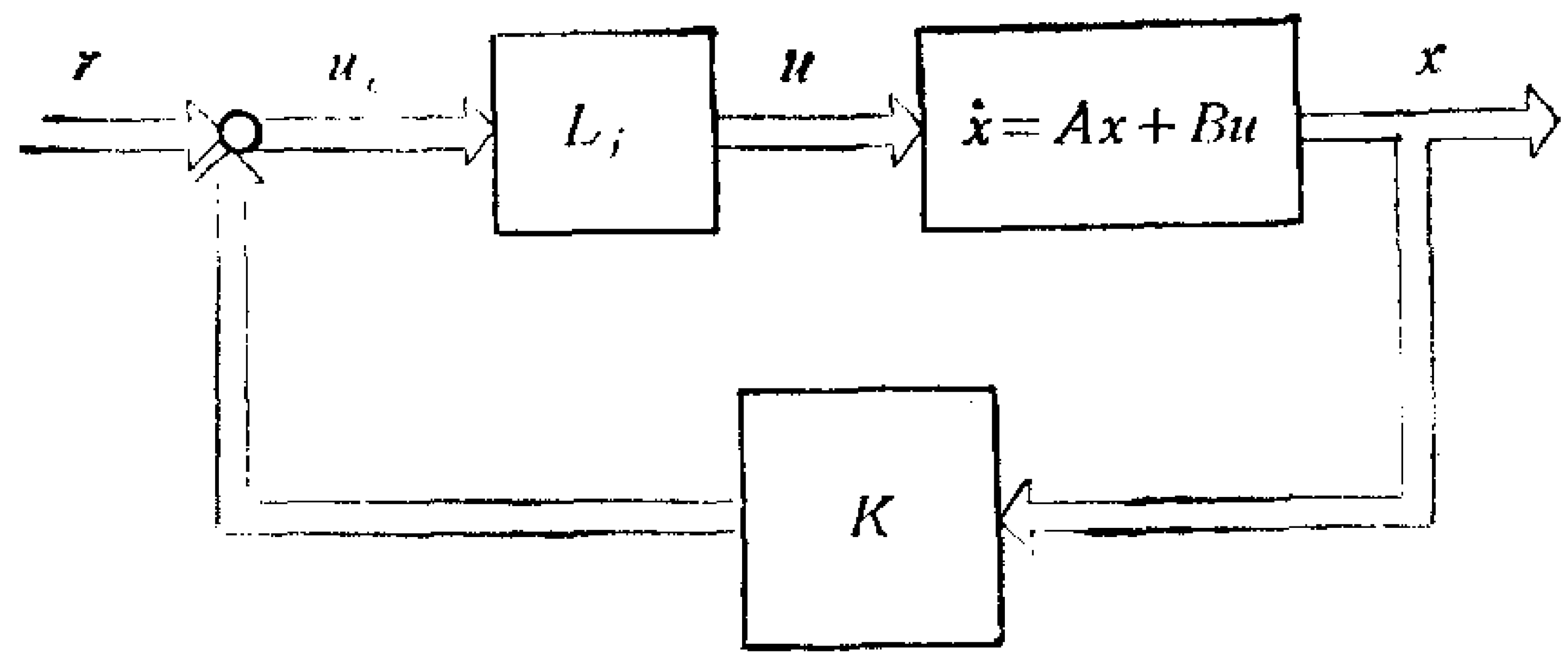


图 1　执行器故障下的 MIMO 系统

其中 Reλ 表示相应矩阵特征值的实部，$\alpha > 0$，$P$ 为下述 Riccati 方程的半正定解

$$(A+\alpha I)^{\mathrm{T}}P + P(A+\alpha I) + PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0, \tag{1}$$

且 $\mathrm{Re}\lambda(A - BR^{-1}B^{\mathrm{T}}P) < -\alpha$.

事实上，上述结果的直接推论是

$(A,B)$ 可控，则 $(A,BL_i)$ 可稳，$L_i$ 为任一执行器故障矩阵.

# 3　反例

假设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad L_i=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则 $(A,B)$ 可控，但 $(A,BL_i)$ 不可稳.

证. $(A,B)$ 可控是明显的；下面假设 $(A,BL_i)$ 可稳，则存在矩阵

$$K=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix},$$

使

$$\mathrm{Re}\lambda(A+BL_iK) < 0, \tag{2}$$

但是，

$$A+BL_iK=\begin{pmatrix}1 & 0\\ k_{21} & k_{22}+1\end{pmatrix},$$

该矩阵有一特征值恒为 1，故(2)式不成立.

另外，这个例子还可说明文[3]的定理 3 不成立. 事实上，由文[3]有

$$\begin{aligned} S &= PB(2L_i - I)R^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q\\ &= 2PL_iR^{-1}P - PR^{-1}P + PR^{-1}P - 2(1+\alpha)P \ (\text{由(1)式})\\ &= 2PL_iR^{-1}P - 2(1+\alpha)P. \end{aligned}$$

若 $S$ 正定，则 $2PL_iR^{-1}P = S + 2(1+\alpha)P$ 也正定，但 $L_i$ 不满秩，$2PL_iR^{-1}P$ 为方阵之乘积，不满秩，这是个矛盾.

之所以如此，是因为文[3]定理 3 的证明中忽视了 $\bar{Q}$ 是与 $P$ 有关的这一事实.

## 4 小结

从上面的讨论中可知，要设计出稳定且具有容错性的 MIMO 控制系统，必须对系统加上更苛刻的条件（如要求系统开环稳定），或者只要求具有部分容错性（如只有一个执行器失效）.

编者注. 文[3]作者认为，黄献青同志的文章"意见准确，批评中肯". 本刊优先发表此文，以纠正文[3]的错误.

### 参 考 文 献

[1] Shimemura E, Fujita M. A design method for linear state feedback systems possessing integrity based on a solution of a Riccati-type equation. *Int. J. Control*, 1985, **42**: 887—899.

[2] Fujita M, Shimemura E. A new type of linear state feedback control possessing integrity based on a solution of generalized Riccati-type equation. *Control Theory and Advanced Technology*, 1986, 2:563—575.

[3] 叶银忠，李三广，蒋慰孙. 从 LQR 理论设计容错 MIMO 系统的方法. 自动化学报，1993，**19**(5)：609—614.

## COMMENTS ON "DESIGN OF FAULT-TOLERANT MIMO SYSTEM FROM LQR THEORY"

HUANG XIANQING

*(Department of Automatic Control Engineering, Huazhong University of Science and Technology Wuhan* 430074)

**Key words:** MIMO system, fault-tolerant control, LQR theory.

本期责任编辑 武海波