第 33 卷 第 6 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 6
2007 年 6 月 ACTA AUTOMATICA SINICA June, 2007

一类广义系统的迭代学习控制

朴凤贤 [1,2] 张庆灵 [1] 王哲峰 [2]

摘 要 在对广义系统进行标准分解的基础上, 研究了含脉冲快子系统的迭代学习控制问题. 通过 Frobenius 范数给出了快子系统在 P 型学习律作用下收敛的充分性条件, 同时通过梯度法给出求解增益矩阵的方法. 其次, 讨论了单输入单输出不确定广义系统的迭代学习控制问题, 通过优化方法给出该系统在 P 型学习律作用下, 系统实际输出尽可能快地收敛到理想输出的增益矩阵的选择方法.

关键词 广义系统, 脉冲, 不确定性, 迭代学习控制, 收敛
中图分类号 TP13

Iterative Learning Control for a Class of Singular Systems

PIAO Feng-Xian[1,2] ZHANG Qing-Ling[1] WANG Zhe-Feng[2]

Abstract In this paper, the problem of iterative learning control for fast subsystem with impulse is investigated based on the Weierstrass canonical form, the sufficient condition that guarantees the convergence of P-type learning law is derived by the Frobenius norm, and the approach to choose the gain matrix is given by gradient flow approach. Then, the uncertain single input single output singular system is discussed, the method to choose the gain matrix such that the actual output converge to desired trajectory as quickly as possible is given by optimization.

Key words Singular system, impulse, uncertainty, iterative learning control, convergence.

1 引言

迭代学习控制方法[1] 自提出以来吸引了国内外许多学者的注意力, 同时也取得了很多研究成果[2~5], 但广义系统[6] 的迭代学习控制文献并不多见. 文献 [7] 研究了时滞广义系统的状态跟踪问题. 工业机器人中很多在重复作业时, 都或多或少的受到环境的限制, 如弧焊机器人, 打毛刺机器人等都要受到终端轨迹限制. 从广泛意义来说, 工业机器人大多数都是由广义系统模型来刻画的, 所以有必要研究广义系统的迭代学习控制问题.

本文在对广义系统进行标准分解的基础上, 研究含脉冲快子系统的迭代学习控制问题. 通过 Frobenius 范数给出了快子系统的迭代学习控制在 P 型学习律收敛的充分性条件, 同时给出求解增益矩阵的方法. 其次, 讨论了单输入单输出广义系统前馈项中含有区间不确定性的迭代学习控制问题, 通过优化方法给出该系统在 P 型学习律作用下, 系统实际输出尽可能快地收敛到理想输出的学习增益的选择方法.

收稿日期 2005-11-27 收修改稿日期 2006-4-21
Received November 27, 2005; in revised form April 21, 2006
国家自然科学基金 (60574011), 辽宁省科技基金 (200140104) 和辽宁省普通高校学科带头人基金 (124210) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60574011), Science Foundation of Liaoning Province(200140104) and Academic Leaders Foundationn of College and University of Liaoning Province(200140104)
1. 东北大学系统科学研究所 沈阳 110004 2. 沈阳航空工业学院理学系 沈阳 110034
1. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang 110004 2. Department of Science, Shenyang Institute of Aeronautical Engineering, Shenyang 110034
DOI: 10.1360/aas-007-0658

2 问题描述

在 Weierstrass 标准分解基础上[8] 考虑含脉冲的快子系统

$$\begin{aligned} N\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{x}(t) + B\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= C\boldsymbol{x}(t) + D\boldsymbol{u}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $t \in [0,T]$, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbf{R}^m$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbf{R}^q$, 分别是系统的状态向量、控制输入向量及输出向量, $N \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是幂零阵 ($N^{h-1} \neq 0, N^h = 0$), $B \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbf{R}^{q\times n}$, $D \in \mathbf{R}^{q\times m}$ 均为实矩阵. 有时简记为 (N, I, B, C, D), 它的状态响应为

$$\boldsymbol{x}(t) = -\sum_{i=1}^{h-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i \boldsymbol{x}_0 - \sum_{i=0}^{h-1} N^i B\boldsymbol{u}^{(i)}(t) \tag{2}$$

其中 $\delta(t)$ 为狄拉克脉冲函数.

系统 (1) 满足下列假设.

假设 1. 系统是脉冲能控的.

假设 2. 系统是输出无脉冲的[9].

假设 3. 对给定的理想轨迹 $\boldsymbol{y}_d(t)$, 存在一控制输入 $\boldsymbol{u}_d(t)$ 满足

$$\begin{aligned} N\dot{\boldsymbol{x}}_d(t) &= \boldsymbol{x}_d(t) + B\boldsymbol{u}_d(t) \\ \boldsymbol{y}_d(t) &= C\boldsymbol{x}_d(t) + D\boldsymbol{u}_d(t) \quad t \in [0,T] \end{aligned}$$

假设 4. 系统的初始定位操作满足 $\boldsymbol{x}_k(0) = \boldsymbol{x}_d(0) = 0, k = 0, 1, 2, \cdots$

动态系统在有限时间区间 $t \in [0,T]$ 内是可重复的, 在迭代学习过程中, 重写系统 (1)

$$\begin{aligned} N\dot{\boldsymbol{x}}_k(t) &= \boldsymbol{x}_k(t) + B\boldsymbol{u}_k(t) \\ \boldsymbol{y}_k(t) &= C\boldsymbol{x}_k(t) + D\boldsymbol{u}_k(t), \ t \in [0,T] \end{aligned} \tag{3}$$

学习控制的目的是找到适当的学习律, 使得迭代学习序列 $\boldsymbol{u}_k(t)$ 一致收敛于理想的控制输入 $\boldsymbol{u}_d(t)$, $\forall t \in [0,T]$, $\boldsymbol{y}_k(t)$ 一致收敛于理想的输出 $\boldsymbol{y}_d(t)$, 即

$$\lim_{k\to\infty} \|\delta\boldsymbol{u}_k(t)\|_F = 0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{e}_k(t)\|_F = 0 \tag{4}$$

其中, $\delta\boldsymbol{u}_k(t) = \boldsymbol{u}_d(t) - \boldsymbol{u}_k(t)$, $\boldsymbol{e}_k(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{y}_k(t)$, $\|\delta\boldsymbol{u}_k(t)\|_F \triangleq \left(\mathrm{Tr}\left(\delta\boldsymbol{u}_k(t)\,\delta\boldsymbol{u}_k^T(t)\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

为了估计迭代学习的次数, 我们给出收敛速度定义.

定义 设 $\rho < 1$ 为迭代学习过程的收敛条件, 则该学习律收敛速度定义为 $v = \rho^{-k-1}$, 其中 k 为迭代次数.

注 1. 由迭代速度定义可以得到迭代次数为 $k \geq \left\lceil -\dfrac{\ln v}{\ln \rho} - 1 \right\rceil$, 其中 $\lceil\cdot\rceil$ 表示向右取整.

3 收敛分析

首先讨论快子系统 (1) 在 P 型学习律下收敛问题.

考虑 P 型学习律

$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t) = \boldsymbol{u}_k(t) + \Gamma\boldsymbol{e}_k(t) \tag{5}$$

其中 $\Gamma \in \mathbf{R}^{m\times q}$ 为学习增益矩阵, $\boldsymbol{e}_k(t) = \boldsymbol{y}_d(t) - \boldsymbol{y}_k(t)$ 为迭代学习误差, 由此得到如下定理:

定理 1. 如果 $\rho = \|I - \Gamma D + \Gamma CB\|_F < 1$, 满足假设 1~4 的系统 (1) 在 P 型学习律 (5) 作用下是收敛的, 即 $\boldsymbol{y}_k(t) \to \boldsymbol{y}_d(t)$, $(k \to \infty)$.

证明略.

下面给出如何确定增益矩阵 Γ, 由于

$$\|I-\Gamma D+\Gamma CB\|_F<1 \ \Leftrightarrow\ \|I-\Gamma D+\Gamma CB\|_F^2<1 \quad (6)$$

根据 Frobenius 范数定义,

$$\gamma=\|I-\Gamma D+\Gamma CB\|_F^2=$$
$$\mathrm{Tr}\left[(I-\Gamma D+\Gamma CB)(I-\Gamma D+\Gamma CB)^T\right]=$$
$$\mathrm{Tr}\left(I-2\Gamma(D-CB)+\Gamma(D-CB)(D-CB)^T\Gamma^T\right)$$

上式两端同时对 τ_{ij} 求偏导得

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\tau_{ij}}=\mathrm{Tr}\Big(2\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau_{ij}}(D-CB)+2\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau_{ij}}(D-CB)\times (D-CB)^T\Gamma^T\Big)$$

其中 $\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau_{ij}}=\zeta_i\eta_j^T$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,q)$, $\Gamma=(\tau_{ij})_{m\times q}$, $\zeta_i\in\mathbf{R}^m\,(i=1,2,\cdots,m)$ 和 $\eta_j\in\mathbf{R}^r\,(j=1,2,\cdots,q)$ 为标准正交基, 通过梯度法[10] 求解出 Γ.

注 2. 此方法给出了如何确定增益矩阵的方法, 但也存在着局限性, 这种方法不能求时变的增益矩阵, 对时变增益矩阵的求法还需探讨.

其次, 考虑具有如下形式的广义系统

$$\begin{aligned}N\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{x}(t)+b\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=c\boldsymbol{x}(t)+d_u\boldsymbol{u}(t)\end{aligned}\quad (7)$$

其中 $b\in\mathbf{R}^{n\times1}, c\in\mathbf{R}^{1\times n}$, $d_u\in[\mu_1,\mu_2]$, μ_1,μ_2 为实数, 其它符号定义如前. 对此系统采用 P 型学习律

$$\boldsymbol{u}_{k+1}(t)=\boldsymbol{u}_k(t)+p\boldsymbol{e}_k(t) \quad (8)$$

p 为学习增益, 在假设 1∼4 情况下得到收敛条件

$$\rho=|1-pd_u+pcb|<1 \quad (9)$$

由于前馈项中含有区间不确定性, 鲁棒设计通常考虑系统最坏的情况下是收敛的, 这样会影响迭代学习控制过程的收敛速度. 为了提高学习的收敛速度, 所以有必要对它优化设计.

从收敛速度定义可知, 系统的收敛速度取决于 ρ 的大小, 也就是说, ρ 越小, 收敛速度越快, 反之 ρ 越大收敛速度越慢, 所以, 应该设计满足收敛条件的 p 使得 ρ 越小越好. 这个问题就归结为如下的 min–max 问题：

$$\begin{aligned}&\rho\triangleq\min_{p\in R}\max_{d\in d_u}|1-pd+pcb|\\ &s.t.\ \ 0\le|1-pd+pcb|<1\end{aligned}\quad (10)$$

由于 $|1-pd+pcb|$ 是 d 的凸函数, 它的最大值在边界上达到, 即 $d=\mu_1$ 及 $d=\mu_2$. 所以可知, 它的最小值在顶点达到, 即

$$|1-p\mu_1+pcb|=|1-p\mu_2+pcb| \quad (11)$$

上式的解为 $p_1=0$, $p_2=\dfrac{2}{\mu_1+\mu_2-2cb}$, 可以得出, $p_1=0$ 时, $\rho=1$ 不满足收敛条件, 故舍去, 所以 p_2 为最优解, $\rho=\dfrac{|\mu_2-\mu_1|}{|\mu_2+\mu_1-2cb|}$. 由此得到下面结论.

定理 2. 满足假设 1∼4 的系统 (7) 在学习律 (8) 作用下是收敛的, 如果 $\rho=|1-pd+pcb|<1$, 而且当 $p=\dfrac{2}{\mu_1+\mu_2-2cb}$, $\rho=\dfrac{|\mu_2-\mu_1|}{|\mu_2+\mu_1-2cb|}$ 时收敛速度最快.

4 结束语

本文主要讨论了广义系统的迭代学习控制问题, 给出含脉冲广义系统在 P 型学习律下收敛的充分性条件. 同时探讨了单输入单输出不确定广义系统的迭代学习控制问题, 并给出了如何确定增益矩阵的方法.

References

1 Arimoto S, Kawamura S, Miyazak F. Bettering operation of robots by learning. *Journal of Robot Systems*, 1984, **1**(2): 123∼140

2 Xu J X, Tan Y. Robust optimal design and convergence properties analysis of iterative learning control approaches. *Automatica*, 2002, **38**(11): 1867∼1880

3 Xu Jian-Xin, Hou Zhong-Sheng. On learning control: the state of the art and perspective. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(6): 943∼955
(许建新, 侯忠生. 学习控制的现状与展望. 自动化学报, 2005, **31**(6): 943∼955)

4 Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian. *Iterative Learning Control*. Beijing: National Defense Industrial Press, 1999
(孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制. 北京: 国防工业出版社, 1999)

5 Lin Hui, Wang Lin. *Iterative Learning Control Theory*. Xi'an: Northwest University of Technology Press, 1998
(林辉, 王林. 迭代学习控制理论. 西安: 西北工业大学, 1998)

6 Rosenbrock H H. Structural properties of linear dynamical systems. *International Journal of Control*, 1974, **20**(2): 191∼202

7 Xie S L, Xie Z D, Liu Y Q. Learning control algorithm for state tracking of singular systems with delay. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 1999, **21**(5): 10∼16

8 Dai L Y. Singular System Control. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. New York: Springer, 1989

9 Zhang Q L, Yang D M. *Analysis and Synthesis for Uncertain Descriptor Systems*. Shenyang: Northeastern University Press, 2003
(张庆灵, 杨冬梅. *不确定广义系统的分析和综合*. 沈阳: 东北大学出版社. 2003)

10 Yan W Y, Teo K L, Moore J B. A gradient flow approach to computing LQ optimal feedback gains. *Optimal Control Application and Methods*, 1994, **15**(1): 67∼75

朴凤贤　2003 年获东北大学应用数学理学硕士学位, 现为东北大学控制理论与控制工程专业博士研究生, 主要研究方向为广义系统的鲁棒控制和迭代学习控制. 本文通信作者. E-mail: fxpiao_ln@126.com
(**PIAO Feng-Xian**　Received her M.S. degree from Northeastern University in 2003. She is currently a Ph.D. candidate in control theory and control engineering of Northeastern University. Her research interest covers robust control, and iterative learning control of descriptor systems. Corresponding author of this paper.)

张庆灵　东北大学教授. 主要研究方向为广义系统, 鲁棒控制和迭代学习控制. E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn
(**ZHANG Qing-Ling**　Professor in College of Science at Northeastern University. His research interest covers robust control theory and descriptor systems, iterative learning control.)

王哲峰　2006 年获东北大学博士学位, 现为沈阳航空工业学院副教授, 主要研究方向为材料成形和自动控制.
(**WANG Zhe-Feng**　Received his Ph.D. degree from Northeastern University in 2006. He is currently an associate professor at Shenyang Institute of Aeronautical Engineering. His research interest covers material forming and automatic control.)