

# 变形电缆的电势计算

朱捷\* 鱼恻堂  
(物理系)

**提要** 长期埋于地下的同轴电缆由于发生了部分形变,其屏蔽层与缆芯之间的恒定电场的电势计算较困难,本文应用有限差分法将场域划分成网格形,经数学处理后,可将场域满足的微分方程转化为线性代数方程组,并用迭代法根据 IBM-PC 机的计算结果绘制了等势线.

**关键词** 变形电缆;电势;等势线;有限差分法

**中图法分类号** O441.5

## 0 引言

同轴电缆线,截面如图1所示,由具有一定电压的缆芯和由铜网组成的屏蔽层组成.若长期埋于地下,同轴电缆将会变形,其截面如图2所示,导致其内部等势线的分布发生变化,致使击穿电压降低.为此,我们要设法计算,并描绘变形后电缆内部的电势分布情况.

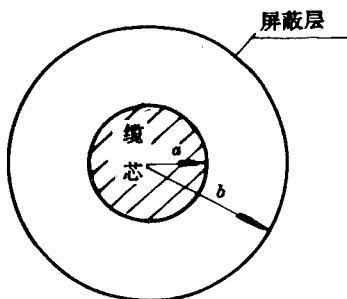


图1 Fig. 1

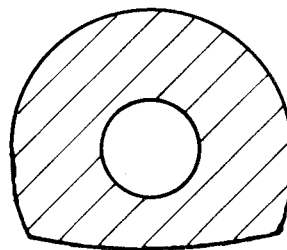


图2 Fig. 2

通常电缆中同轴缆芯与屏蔽层之间区域的电场,可看作是通有恒定电流导电媒质周围介质中的恒定电场,是分布不随时间变化的电荷产生的,一般情况下,对于恒定电流有边界条件

$$j_{n1} = j_{n2}, E_{t1} = E_{t2}.$$

$j_{n1}$  和  $j_{n2}$  为在媒质1,2内的电流密度法向分量;

本文于1994年7月7日收到.

\* 94届物理系毕业生.

$E_{t1}$  和  $E_{t2}$  为媒质1,2内的场强切向分量.

考虑到欧姆定律微分形式:  $j = \sigma E$  ( $\sigma$  为媒质电导率)

$$\text{则} \quad \frac{\text{tg} \theta_1}{\text{tg} \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$\theta_1$  与  $\theta_2$  为与界面法线夹角(如图3所示). 现缆芯周围的绝缘介质可看作理想介质,  $\sigma_2 = 0, j_{a2} = 0$ , 而缆芯导体的  $\sigma_1$  又很大, 故紧靠缆芯表面介质中场强几乎与界面垂直. 因此, 该电场也是无旋场, 其研究与处理方法可与静电场的类同.

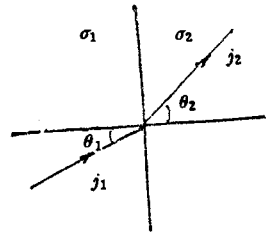


图3 Fig. 3

由于电缆变形, 其介质内截面的等势线不是一组同心圆, 其变形后形状甚至更异于图2, 故一般计算方法尚感困难无法处理.

### 1 有限差分法求解

目前, 计算机的使用日趋普及, 我们可应用有限差分法对场域进行一番数学处理后计算出场域内各点的电势值, 从而了解电势的分布. 现讨论二维平面场, 其基本方法如下:

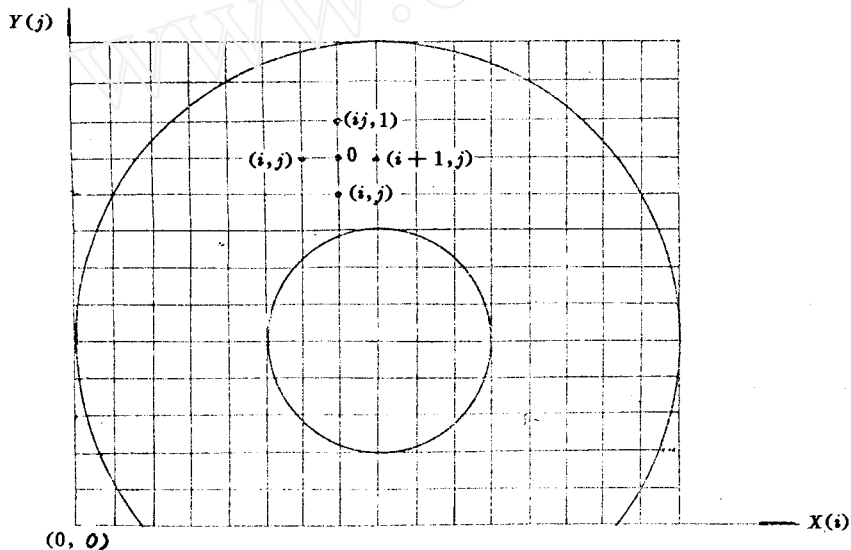


图4 Fig. 4

设变形的同轴电缆的截面简化为部分圆面并置于矩形区域中如图4(若图形如图2所示则处理方法相同), 而将矩形区域划分成  $[i \times j]$  点阵网格, 网格中的交点称为节点, 则将所研究的区域离散化为具有很多节点的网格. 为便于计算, 使与缆芯中心的距离小于等于缆芯半径的节点都赋予电势值  $u_0$ , 而与缆芯中心的距离大于等于屏蔽层半径的节点都赋予零电势. 设想若网格划分得非常密, 则同轴电缆中的场域各点都可由节点代替(包括边界, 但这受到计算机容量的限制), 那么上述边界附近的节点的连线就近似于同轴电缆的外形.

同轴电缆中屏蔽层与缆芯之间的区域为我们所要研究的区域, 与静电场中情况相类似, 对于其中任一节点  $o$  都应满足基本的拉普拉斯方程  $\nabla^2 \varphi = 0$ . 应用有限差分法将每一节点用差商代替微商, 从而把所研究区域的偏微分方程, 变为各个节点上的差分方程. 求解微分方程就变为求解差分方程的问题.

对于研究区域中任一节点  $o$  都可以列出一个差分方程

$$\varphi_{(i+1,j)} + \varphi_{(i,j+1)} + \varphi_{(i-1,j)} + \varphi_{(i,j-1)} - 4\varphi_{(i,j)} = 0 \quad (1)$$

通常在进行迭代计算时采用这样的格式

$$\varphi_{(i,j)} = \frac{1}{4} [\varphi_{(i+1,j)} + \varphi_{(i,j+1)} + \varphi_{(i-1,j)} + \varphi_{(i,j-1)}] \quad (2)$$

由(1)式可知, 每个差分方程并不包含整个场域内众多未知量, 最多也不超过5个, 故方程组的系数矩阵是稀疏矩阵. 若图4中研究区域内各点按(2)式列出方程, 则此方程组的系数矩阵的主对角线元素

$$a_{mm} = 4 \quad m = 2, 3, 4, \dots, k.$$

方程求解采用迭代法, 根据系数矩阵的性质可看出该主对角线元素的绝对值将大于或等于同行其他元素绝对值之和, 即

$$|a_{mm}| \geq \sum_{\substack{n=2 \\ n \neq m}}^k |a_{mn}|$$

满足收敛性条件, 则方程有解.

应用异步迭代法, 则迭代公式(3)应改为

$$\varphi_{(i,j)}^{(n+1)} = \frac{1}{4} (\varphi_{(i,j)}^{(n)} + \varphi_{(i,j+1)}^{(n)} + \varphi_{(i-1,j)}^{(n+1)} + \varphi_{(i,j-1)}^{(n+1)}) \quad (3)$$

采用超松弛异步迭代法则对于所研究的场域中任一节点  $o$  (图4) 都应为

$$\varphi_{(i,j)}^{(n+1)} = \varphi_{(i,j)}^{(n)} + a \left[ \frac{1}{4} (\varphi_{(i,j)}^{(n)} + \varphi_{(i,j+1)}^{(n)} + \varphi_{(i-1,j)}^{(n+1)} + \varphi_{(i,j-1)}^{(n+1)}) - \varphi_{(i,j)}^{(n)} \right] \quad (4)$$

式中  $(n)$  或  $(n+1)$  为迭代计算次数;  $a$  为加速因子, 其值在1与2之间.

对于所研究场域内的任一节点都能列出一个方程, 从而开成了一个代数方程组, 此代数方程组也称为差分方程组, 节点越多方程也越多, 整个差分方程组的个数等于所有全部场域内部节点的个数. 由于方程众多, 故必须借助于计算机求解.

## 2 程序说明

本程序是以 C 语言编写, 并在 IBM-PC 286 上运行通过. 在程序中开辟了  $[i \times j]$  的数组, 以  $u[i][j]$  表示  $(i, j)$  节点位置上的电势值. 在应用迭代法求解之前, 先使矩形区域内各节点具有一定的初值. 对于电缆缆芯内部区域中的节点都赋以电势值10V, 而所研究的场域即屏蔽层与缆芯之间的区域以一定的方式赋初值. 本程序以缆芯的中心为圆心采用同心圆按半径增大电势值逐步递减的方式赋以一定的初值

$$u[i][j] = 14 - 0.5 * \text{sqrt}((j-10) * (j-10) + i-28) * (i-28))$$

式中  $\text{sqrt}()$  为对括号中的值求平方根.

这样利于节省计算时间.

程序中应用超松弛异步迭代法, 迭代公式见(5)式. 对于矩形区域,  $x$  方向分为  $m$  等分,  $y$  方向分为  $n$  等分, 则  $a$  的最佳值可由下式计算:

$$a = 2(1 - \pi \sqrt{\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}})$$

本程序中  $m = 56, n = 38$ , 则最佳超松弛因子为

$$a = 2(1 - \pi \sqrt{\frac{1}{56^2} + \frac{1}{38^2}}) = 1.80$$

除用理论公式计算外,还通过试验选一最佳因子,使迭代以最快速度收敛.下表记录为试验结果:

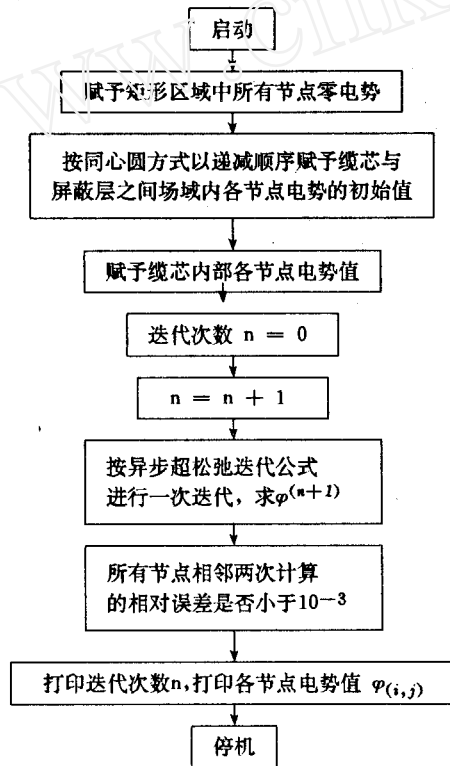
表 1 Tab. 1

加速因子 ( $\alpha$ )	* 1.76	1.78	1.80	1.90
迭代次数 ( $n$ )	46	48	48	103

程序中  $\alpha$  取 1.76, 迭代计算 46 次.

当进行迭代计算时,遇到并非是要研究的区域中的节点则越过. 机器进行迭代计算直至场中各点相邻两次计算的相对误差小于指定值  $10^{-3}$  时停止, 最后一次的迭代结果就可认为是内部各节点电势的近似数值解, 机器打印迭代次数  $n$ , 并打印各节点电势值. 在 IBM-PC 286 型计算机上运行表明, 迭代次数为 46 次时, 即已达到上述指定的精度要求, 运算时间约为 3min.

程序框图:



根据计算结果,由计算机描绘出场域内等势线(图5).本图线应用 GRAPHTOOL 软件包先建立三维坐标,并将由差分法所得的网格中各点电势作为第三维坐标值,画出曲面图(图6).然后对曲面分别作截面,所得曲线即如图5所示.等势线由内向外分别表示为 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1V 等电势值.

程序清单:

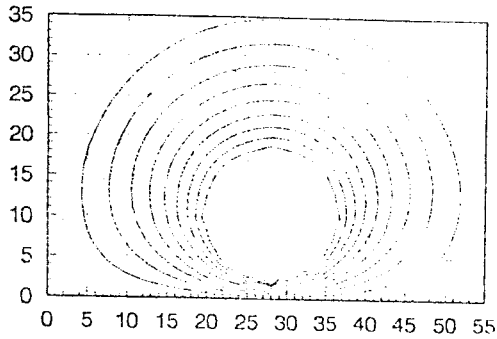


图 5 Fig. 5

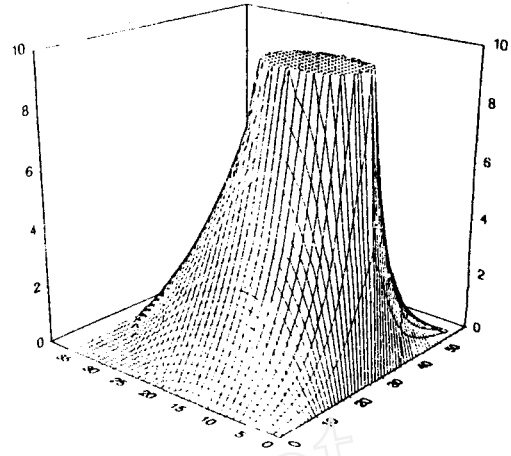


图 6 Fig. 6

```

#include "math.h"
main()
{
    int i,j,g,n,t;
    float a,b,c,d,w,m;
    static float u[57][39];
    a=1.76;
    for (i=1;i<=55;i++)
        for (j=1;j<=37;j++)
            {
                m=sqrt((j-10)*(j-10)+i-28)*(i-28));
                if ((m<=28)&&(m=8)) u[i][j]=14-0.5*m;
                if (m<=8) u[i][j]=10;
            }
    do
    {
        n=0;
        g=0;
        n=n+1;
        for (i=1;i<=55;i++)
            for (j=1;j<=37;j++)
                {
                    m=sqrt((j-10)*(j-10)+(i-28)*(i-28));
                    if (m<=28||m<=8) continue;
                    else;
                    {
                        b=u[i][j];
                        c=(u[i+1][j]+u[i][j+1]+u[i-1][j]+u[i][j-1])/4;
                        d=b+a*(c-b);
                        w=fabs(c-b)/c;
                    }
                }
    }
}

```

```

        if (w >= 0.001) {g = g + 1; u[i][j] = d;}
        else u[i][j] = d;
    }
}
printf("n = %d, w = %5.2f, g = %d\n", n, w, g);
}
while (g > 0);
printf("n = %d\n", n);
for (i = 0; i <= 56; i++)
{
    printf("\ni = %d\n", i);
    for (j = 0; j <= 38; j++)
    {
        if (j % 5 == 0) printf("n");
        printf(" %2d = %5.2f", j, u, i, j);
    }
}
}
}

```

### 3 结束语

通过上面的实例,我们可以看到当场域的几何特征较复杂时,应用有限差分法进行分析计算也很容易.有限差分法作为一种数值方法,把电、磁场连续场域内的问题变换为离散系统的问题来求解即通过离散化模型上各离散点的数值解来逼近连续场域内的真实解,因此是一种近似计算方法.但是,现阶段电子计算机的发展水平,已能充分保证数值解的精确度.

用有限差分计算而得的各点电势的数值解,可继续计算场强或其他电、磁场的积分特性,例如磁导、电导和电容等磁路及电路的参数,有限差分法的应用很广,不仅能求解均匀线性媒质中的势场,而且还能求解非线性媒质中的场;它不仅能求解恒定场和似稳场,还能求解时变场.在边值问题的数值方法中,有限差分法是相当简便的,在计算机存储容量许可的情况下,有可能采取较精细的网格,使离散化的模型能较精确地逼近真实问题.

在此,对于在绘制等势线过程中给予帮助的庄思聪老师一并致谢.

### 参 考 文 献

- [1] 冯慈璋,电磁场,人民教育出版社,1979
- [2] 周省三,电磁场基本教程,高等教育出版社,1985
- [3] 华中工学院,工程数学,人民教育出版社,1978
- [4] J. D. 克劳斯,电磁学,人民邮电出版社,1979

## Calculation of the Electric Potential of Deformation Cable

*Zhu Jie Yu Yitang*

(Department of Physical Education)

### Abstract

It is not easy to calculate the potential of the electrostatic field between the deformed coaxial cable screening and the core of a deformed coaxial cable, which is buried underground for a long time.

We divide the field into a set of nets so that we can use finite difference method to calculate the potential. By using iterative method to solve the corresponding algebraic equations on an IBM-PC, we get a set of equipotential curves.

**Keywords** deformed cable; electric potential; net linear equations; finite difference method