第 20 卷 第 5 期
1994 年 9 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 20, No. 5
Sep., 1994

短 文

一类 LQ 问题的最优控制的综合方法

王 志 忠
(中南工业大学数力系 长沙 410083)

摘 要

对有某些限制的一类 LQ 问题给出了最优控制的闭合形式，所给出的综合方法的特点是避免了对 Riccati 方程进行数值求解.

关键词: LQ 问题，最优控制，综合方法，闭合形式算式.

1 引言

文献[1,2]给出了线性二次型（LQ）调节问题的最优控制的综合理论和方法，基于这一理论建立起的线性最优调节器在生产过程控制中有着广泛的应用. LQ 问题最优控制包含一个互相耦合的非线性的 Riccati 矩阵方程. 一般情况下，Riccati 方程不可能找到闭合形式解，只能用数字计算机来求出其数值解. 目前，已研制出多种以求解 Riccati 方程的数值方法和相应软件，但使用结果表明，它们各有其局限性.

文献[3]对无限时间的 LQ 问题，给出了在某些限制条件下最优控制中的闭合形式. 本文在此基础上针对这些限制，对在控制过程中具有一定适应领域的一类有限时间的 LQ 问题，提出了一类区别于常规结果的综合方法，特点是可给出闭合形式的最优控制律计算公式，避免了对 Riccati 方程进行数值求解. 同时，文献[3]的主要定理成了本文的推论.

2 引理

引理 1. 设 $\Lambda_1, \bar{\Lambda}_1, Q_1$ 都是 $n\times n$ 的可逆方阵，且 $\Lambda_1\bar{\Lambda}_1 - Q_1$ 也可逆，则 $\begin{bmatrix}\Lambda_1 & Q_1\\ I_n & \bar{\Lambda}_1\end{bmatrix}$ 可逆，且

$$\begin{bmatrix}\Lambda_1 & Q_1\\ I_n & \bar{\Lambda}_1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-\bar{\Lambda}_1(Q_1-\Lambda_1\bar{\Lambda}_1)^{-1} & -\Lambda_1^{-1}Q_1(\bar{\Lambda}_1-\Lambda_1^{-1}Q_1)^{-1}\\ (Q_1-\Lambda_1\bar{\Lambda}_1)^{-1} & (\bar{\Lambda}_1-\Lambda_1^{-1}Q_1)^{-1}\end{bmatrix}. \tag{1}$$

本文于 1991 年 11 月 11 日收到

证略.

引理 2. 设W可逆,则

$$(s^2I-W^2)^{-1}=\frac{1}{2}[(sI-W)^{-1}W^{-1}-W^{-1}(sI+W)^{-1}]. \tag{2}$$

证略.

引理 3. 用 $\mathscr{L}^{-1}$ 表示拉氏反变换,则

$$\mathscr{L}^{-1}\left(I+\frac{W}{s}\right)^{-1}=I\delta(t)-We^{-Wt}, \tag{3}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left(I-\frac{W}{s}\right)^{-1}=I\delta(t)+We^{Wt}. \tag{4}$$

证略.

3 一类 LQ 问题的最优控制的闭合算式

一类 LQ 问题的定义如下:

受控对象的动态方程

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ x(0)=x_0,\ t\in[0,t_f], \tag{5}$$

其中 $x\in\mathscr{B}^n, u\in\mathscr{B}^r, A\in\mathscr{A}$, B 为满秩. 矩阵类 $\mathscr{A}$ 规定为

$\mathscr{A}=\{A|A\in\mathscr{B}^{n\times n}$, 特征值 $\lambda_i(A)(i=1,2,\cdots,n)$ 为相异实数或几何重数为1的实数$\}$. (6)

性能指标泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^TQx+u^TRu)dt, \tag{7}$$

其中 $Q\in\Omega$, 正定对称类 Ω 规定为

$$\Omega=\{Q|Q=G^TG\in\mathscr{B}^{n\times n},\ \det G\neq 0, GAG^{-1}=\Lambda, \Lambda\text{为实对角矩阵}\}. \tag{8}$$

对于以上(5)—(8)式所定义的 LQ 问题, 存在如下定理:

定理 1. 对(5)—(8)式所定义的 LQ 问题, 最优控制 u^* 和最优性能值 J^* 的算式具有闭合形式. 进而令

$$W^2=G(BR^{-1}B^T+A^2Q^{-1})G^T\geqslant 0,$$

则有 $u^*(t)=-k^*(t)x^*(t)$,

$$k^*(t)=R^{-1}B^TG^T(I_n-e^{2W(t-t_f)})W^{-1}[(I_n+\Lambda W^{-1})e^{2W(t-t_f)}+I_n-\Lambda W^{-1}]^{-1}G.$$

最优轨线为下述状态方程的解:

$$\dot{x}^*(t)=Ax^*(t)+Bu^*(t),\ x^*(0)=x_0,\ \forall x_0\neq 0.$$

而最优性能值为

$$J^*=\frac{1}{2}x_0^T(e^{2Wt_f}-I_n)W^{-1}[(I_n+\Lambda W^{-1})+(I_n-\Lambda W^{-1})e^{2Wt_f}]^{-1}x_0. \tag{9}$$

证. 由文献[4]知, LQ 问题的一般形式为

$$u^*(t)=-k^*(t)x^*(t),\ k^*(t)=R^{-1}B^TP(t).$$

最优轨线 $x^*(t)$ 为下述状态方程的解:

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu^*(t),\ x^*(0) = x_0. \tag{10}$$

而最优性能值为

$$J^* = \frac{1}{2} x_0^{\mathrm{T}} P(0) x_0,\ \forall x_0 \neq 0, \tag{11}$$

其中，$P(t)$ 为下述矩阵 Riccati 微分方程的正半定对称解阵：

$$\begin{aligned} -\dot{p}(t) &= p(t)A + Ap(t) + Q - p(t)BR^{-1}B^{\mathrm{T}}p(t), \\ p(t_f) &= 0, t \in [0, t_f]. \end{aligned} \tag{12}$$

由于给定 LQ 问题中 $Q = G^{\mathrm{T}}G$，$\det G \neq 0$。故将(12)式同时左乘 $G^{-\mathrm{T}}$ 和右乘 G^{-1} 可得

$$\begin{aligned} &G^{-\mathrm{T}}p(t)G^{-1}GAG^{-1} + G^{-\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}G^{-\mathrm{T}}p(t)G^{-1} + I_n \\ &- G^{-\mathrm{T}}p(t)G^{-1}GBR^{-1}B^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}G^{-\mathrm{T}}p(t)G^{-1} = -G^{-\mathrm{T}}\dot{p}(t)G^{-1}. \end{aligned}$$

注意到 $GAG^{-1} = \Lambda$，令 $H(t) = G^{-\mathrm{T}}p(t)G^{-1}$，$Q_1 = GBR^{-1}B^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{aligned} &H(t)\Lambda + \Lambda H(t) + I - H(t)Q_1H(t) = -\dot{H}(t), \\ &H(t_f) = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

现考虑

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & -Q_1 \\ -I_n & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ H(t_f) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

设 $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ 是(14)式的解，由文献[5]知，$H(t) = y(t)x^{-1}(t)$。由(14)式知状态方程的解为

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \phi(t, t_f) \begin{bmatrix} x(t_f) \\ y(t_f) \end{bmatrix} = \phi(t, t_f) \begin{bmatrix} I_n \\ H(t_f) \end{bmatrix}.$$

令状态转移矩阵

$$\phi(t, t_f) = \phi(t - t_f) \triangleq \begin{bmatrix} \phi_{11}(t - t_f) & \phi_{12}(t - t_f) \\ \phi_{21}(t - t_f) & \phi_{22}(t - t_f) \end{bmatrix},$$

则有

$$H(t) = y(t)x^{-1}(t) = \phi_{21}(t - t_f)\phi_{11}^{-1}(t - t_f),$$

又

$$\phi(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(sI_{2n} - \begin{bmatrix} \Lambda & -Q_1 \\ -I_n & -\Lambda \end{bmatrix}\right)^{-1} = \mathscr{L}^{-1} \begin{bmatrix} sI_n - \Lambda & Q_1 \\ I_n & sI_n + \Lambda \end{bmatrix}^{-1}.$$

令 $W^2 = \Lambda^2 + Q_1 = G(BR^{-1}B^{\mathrm{T}} + A^2Q^{-1})G^{\mathrm{T}}$，显然 $W^2 \geqslant 0$，由引理 1 知

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} sI_n - \Lambda & Q_1 \\ I_n & sI_n + \Lambda \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (sI_n + \Lambda)(s^2I_n - W^2)^{-1} & -(sI_n + \Lambda)^{-1}Q_1[sI_n + \Lambda - (sI_n - \Lambda)^{-1}Q_1]^{-1} \\ -(s^2I_n - W^2)^{-1} & [(sI_n + \Lambda) - (sI_n - \Lambda)^{-1}Q_1]^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{11}(t) &= \mathscr{L}^{-1}[(sI_n + \Lambda)(s^2I_n - W^2)^{-1}] \\ &= \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\left[\left(I_n - \frac{W}{s}\right)^{-1}W^{-1} - W^{-1}\left(I_n + \frac{W}{s}\right)^{-1}\right]\right. \end{aligned}$$

$$+\Lambda[(sI_n-W)^{-1}W^{-1}-W^{-1}(sI_n+W)^{-1}]\Big\}$$

$$=\frac{1}{2}\{[I_n\delta(t)+We^{Wt}]W^{-1}-W^{-1}[I_n\delta(t)-We^{-Wt}]+\Lambda[e^{Wt}W^{-1}-W^{-1}e^{-Wt}]\}$$

$$=\frac{1}{2}[(e^{Wt}+e^{-Wt})+\Lambda W^{-1}(e^{Wt}-e^{-Wt})],$$

$$\phi_{21}(t)=\mathscr{L}^{-1}(sI_n-W^2)$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}[(sI_n-W)^{-1}W^{-1}-W^{-1}(sI_n+W)^{-1}]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}W^{-1}(e^{Wt}-e^{-Wt}),$$

故

$$H(t)=(I_n-e^{2W(t-t_f)})W^{-1}[(I_n+\Lambda W^{-1})e^{2W(t-t_f)}+I_n-\Lambda W^{-1}]^{-1},$$

$$k^*(t)=R^{-1}BG^{T}H(t)G$$

$$=R^{-1}B(I_n-e^{2W(t-t_f)})W^{-1}[(I_n+\Lambda W^{-1})e^{2W(t-t_f)}+I_n-\Lambda W^{-1}]^{-1}G.$$

又由

$$H(0)=(I_n-e^{-2Wt_f})W^{-1}[(I_n+\Lambda W^{-1})e^{-2Wt_f}+I_n-\Lambda W^{-1}]^{-1},$$

得最优性能值为

$$J^*=\frac{1}{2}x_0^{T}H(0)x_0,$$

$$=\frac{1}{2}x_0^{T}(I_n-e^{-2Wt_f})W^{-1}[(I_n+\Lambda W^{-1})e^{-2Wt_f}+I_n-\Lambda W^{-1}]^{-1}x_0.$$

故定理得证。

几点说明如下:

1）当 $t\to-\infty$时，$H(t)\to(W-\Lambda)^{-1}$. 定理 1 加上（A,B）能控，则最优控制为

$$u^*(t)=-R^{-1}B^{T}G^{T}(W-\Lambda)^{-1}G$$

$$=-R^{-1}B^{T}(F-AQ^{-1})^{-1},$$

其中 $F=G^{-1}WG^{T}$. 这就是文[3]的定理 1.

2）虽然 $A\in\mathscr{A}$，要求 $\lambda(A)$ 为相异实数，但是有一些生产过程是能满足的. $Q\in\Omega$ 也是一个很大的集合.

3）虽然最优控制的闭合算式繁琐，但克服了由数值计算带来的病态误差.

参 考 文 献

[1] Athans M, Falb P L. Optimal Control——An Introduction to the theory and its application, New York: McGrawtlill, 1966.
[2] Anderson B D O, Moore J B. Linear Optimal Control. Englewood Cliffs, NJ: Prentile-Hall, 1971.
[3] 郑大钟. 一类 LQ 问题的最优控制和次最优控制的一种综合方法. 清华大学学报, 1989, 29(4): 109—114
[4] 郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 1990.
[5] 韩京清等. 线性系统理论代数基础. 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1985.

A SYNTHESIS METHOD FOR DETERMINING THE OPTIMAL CONTROL LAW OF A CLASS OF LQ REGULATOR PROBLEM

WANG ZHIZHONG

(Central South University of technology Department of Applied Methamatics and Machanics Changsha 410083)

ABSTRACT

In this paper, a closed formula is given to determine the optimal control law for a class of the linear quadratic reguiator problems. Using this formula the numerical solution of Riccati can be avoided.

Key words: LQ regulator problem; optimal control; synthesis method; closed-from formula.