第23卷 第3期 自动化学报 Vol. 23, No. 3
1997年5月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1997

短文

一般模型 2-D 系统干扰解耦观测器设计

方 勇
（内江师范专科学校数学系 内江 641002）
杨成梧
（南京理工大学动力工程学院 南京 210014）

摘 要 提出了一般模型 2-D 系统(2DGM)的观测器关于干扰解耦的条件，并给出了 2DGM 干扰解耦观测器的两种设计方法和算例.

关键词 2-D 系统，观测器，干扰解耦.

1 引言

由于 2-D 系统理论在自动控制、图象处理、网络综合等工程领域的重要作用，近年来进行了许多研究[1,2]，并取得了丰硕的成果. 与 1-D 系统一样，观测器理论和设计问题也是 2-D 领域中重要课题之一. 文[2]针对 2-D Roesser 模型提出了观测器的设计方法；文[3]借助于局部能控性和渐近稳定性理论对 2DGM 提出了观测器设计理论，并讨论了分离性定理. 本文将研究 2DGM 的干扰解耦观测器设计问题，即当系统受到某一未知外加干扰作用时，如何设计系统的状态观测器，使其与干扰无关. 文[4]在 1-D 情形研究了此问题.

2 问题的描述

考虑如下受干扰作用的 2DGM[3]

$$\boldsymbol{x}(i+1)+1=A_0\boldsymbol{x}(i,j)+A_1\boldsymbol{x}(i+1,j)+A_2\boldsymbol{x}(i,j+1)+B_0\boldsymbol{u}(i,j)$$
$$+B_1\boldsymbol{u}(i+1,j)+B_2\boldsymbol{u}(i,j+1)+E_0\boldsymbol{d}(i,j)+E_1\boldsymbol{d}(i+1,j)+E_2\boldsymbol{d}(i,j+1), \quad (1)$$
$$\boldsymbol{y}(i,j)=C\boldsymbol{x}(i,j). \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{x}(i,j)\in \boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{u}(i,j)\in \boldsymbol{R}^m$，$\boldsymbol{y}(i,j)\in \boldsymbol{R}^p$，$\boldsymbol{d}(i,j)\in \boldsymbol{R}^l$ 分别为系统的局部状态向量、输入向量、输出向量和干扰向量；$A_i,B_i,E_i,C(i=0,1,2)$为适当阶数的实距阵，边界条件为

$$\boldsymbol{x}(i,0),\boldsymbol{x}(0,j),\ i,j=0,1,2,\cdots, \quad (3)$$

且该系统在$[(0,0),(n,n)]$中局部能控.

该系统的 $K_0\boldsymbol{x}$ 观测器具有如下一般形式[3]

$$\boldsymbol{z}(i+1,j+1)=F_0\boldsymbol{z}(i,j)+F_1\boldsymbol{z}(i+1,j)+F_2\boldsymbol{z}(i,j+1)+G_0\boldsymbol{u}(i,j)+G_1\boldsymbol{u}(i+1,j)$$

收稿日期 1994-12-28

$$+G_2\boldsymbol{u}(i,j+1)+H_0\boldsymbol{y}(i,j)+H_1\boldsymbol{y}(i+1,j)+H_2\boldsymbol{y}(i,j+1), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w}(i,j)=L\boldsymbol{z}(i,j)+K\boldsymbol{y}(i,j). \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}^{n_1}$,$\boldsymbol{w}(i,j)\in\boldsymbol{R}^{n_2}$,边界条件为

$$\boldsymbol{z}(i,0),\boldsymbol{z}(0,j),\ i,j=0,1,2,\cdots. \tag{6}$$

对任意输入及边界条件(3),(6)有

$$\lim_{i,j\to\infty}(\boldsymbol{w}(i,j)-K_0\boldsymbol{x}(i,j))=0. \tag{7}$$

综合文[3]可得如下定理.

定理 1. 对 2DGM(1)—(3),当干扰向量 $\boldsymbol{d}(i,j)\equiv0$ 时,若满足

$$1)\det(I-F_1z_1-F_2z_2-F_0z_1z_2)\neq0,|z_1|\leqslant1,|z_2|\leqslant1, \tag{8}$$

$$2)K_0=LT+KC, \tag{9}$$

$$3)TA_i=F_iT+H_iC\quad(i=0,1,2), \tag{10}$$

$$4)G_i=TB_i\quad(i=0,1,2), \tag{11}$$

则 2-D 系统(4)—(6)是 2 DGM 的 $K_0\boldsymbol{x}$ 观测器. 但当 $\boldsymbol{d}(i,j)\neq0$ 时,由于 $\boldsymbol{w}(i,j)$,$\boldsymbol{x}(i,j)$ 均与 $\boldsymbol{d}$ 有关,因而(7)式一般不再成立,为此引入如下定义.

定义. 对 2-D 控制系统(1)—(6)和(8)—(11),如果对任何实向量函数 $\boldsymbol{d}(i,j)$均有(7)式成立,则称(4)—(11)式为 2DGM 干扰解耦观测器,或称观测器(1)—(6)和(8)—(11)是关于系统(1)中的干扰 $\boldsymbol{d}(i,j)$解耦的.

本文的目的是讨论 2DGM(1)的干扰解耦观测器(4)—(11)的条件及设计问题.

3 干扰解耦的条件

定理 2. 观测器(4)—(6)和(8)—(11)为 2DGM(1)的干扰解耦观测器的充要条件是

$$L(z_1z_2I_{n1}-F_0-F_1z_1-F_2z_2)^{-1}T(E_0+z_1E_1+z_2E_2)=0,\forall\ (z_1,z_2). \tag{12}$$

证明. 定义观测器误差为

$$\boldsymbol{e}(i,j)=\boldsymbol{z}(i,j)-T\boldsymbol{x}(i,j) \tag{13}$$

及

$$\boldsymbol{\varepsilon}(i,j)=\boldsymbol{w}(i,j)-K_0\boldsymbol{x}(i,j). \tag{14}$$

由(1)—(11)式有

$$\boldsymbol{e}(i+1,j+1)=F_0\boldsymbol{e}(i,j)+F_1\boldsymbol{e}(i+1,j)+F_2\boldsymbol{e}(i,j+1)$$
$$-TE_0\boldsymbol{d}(i,j)-TE_1\boldsymbol{d}(i+1,j)-TE_2\boldsymbol{d}(i,j+1), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(i,j)=L\boldsymbol{e}(i,j). \tag{16}$$

由干扰 $\boldsymbol{d}(i,j)$到观测器误差的传递函数为

$$G_d(z_1,z_2)=L(z_1z_2I_{n1}-z_1F_1-z_2F_2-F_0)^{-1}T(-E_0-E_1z_1-E_2z_2). \tag{17}$$

对任何 $\boldsymbol{d}(i,j)$,均有 $\boldsymbol{\varepsilon}(i,j)\to0(i,j\to\infty)$的充要条件为 $G_d(z_1,z_2)\equiv0$. 证毕.

推论. 若 $\mathrm{rank}L=n_1$,则(12)式等价于

$$T(E_0E_1E_2)=0. \tag{18}$$

4 干扰解耦观测器设计

引理. [5]矩阵方程 $A\times B=C$ 有解的充要条件是 $AA^gCB^gB=C$,且一般解为 $X=$

$A^gCB^g+Z-A^gAZBB^g$. 其中 Z 为任意矩阵；A^g，B^g为 A，B 的广义逆矩阵.

设 $n_1=2t$，并令

$$F_i\begin{bmatrix} \overline{F}_i & \\ & \overline{F}_i \end{bmatrix}, L=(\overline{L}\overline{L}), T=\begin{bmatrix} \overline{T} \\ -\overline{T} \end{bmatrix}, H_i=\begin{bmatrix} \overline{H}_i \\ -\overline{H}_i \end{bmatrix}. \tag{19}$$

这里 $\overline{F}_i\in \boldsymbol{R}^{t\times t}$，$\overline{L}\in \boldsymbol{R}^{n_2\times t}$，$\overline{T}\in \boldsymbol{R}^{t\times n}$，$\overline{H}_i\in \boldsymbol{R}^{t\times p}$，容易验证对任何 E_0，E_1，E_2(12)式均成立，且 $LT=0$. 不妨设 $C=(0\quad I_p)$，则 $CC^g=I$. 由引理知满足(9)式的 K 为

$$K=K_0C^g. \tag{20}$$

由(19)式，(8)，(10)式分别等价于

$$\det(I_t-\overline{F}_1z_1-\overline{F}_2z_2-\overline{F}_0z_1z_2)\neq 0, |z_1|\leqslant 1, |z_2|\leqslant 1, \tag{21}$$

$$\overline{T}A_i=\overline{F}_i\overline{T}+\overline{H}_iC. \tag{22}$$

令

$$\overline{T}=(I_t\overline{K}), A_i\begin{bmatrix} A_{i1} & A_{i2} \\ A_{i2} & A_{i4} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中 $A_{i1}\in \boldsymbol{R}^{txt}$，$A_{i4}\in \boldsymbol{R}^{(n-t)\times(n-t)}$，$\overline{K}\in \boldsymbol{R}^{t\times(n-t)}$，则由(22)式得

$$\overline{F}_i=A_{i1}+\overline{K}A_{i3}, \tag{24}$$

$$\overline{H}_i=A_{i2}+\overline{K}A_{i4}-\overline{F}_i\overline{K}(i=0,1,2). \tag{25}$$

因此，只要找到 $\overline{K}$，使(24)式中的 $\overline{F}_i$满足(21)式，问题就能解决. 而由文[6]及任何极点配置方法[7]，$\overline{K}$ 是不难求得的. 综上所述，干扰解耦观测器设计可由下述算法实现.

算法 1.

步骤 1. 按(23)式计算 $A_{ij}(i=0,1,2;j=1,2,3,4)$，并求 $\overline{K}$ 使(24)式中的 $\overline{F}_i(i=0,1,2)$满足(21)式；

步骤 2. 通过(23)—(25)及(19)式求 T，F_i，$H_i(i=0,1,2)$；

步骤 3. 通过(20)，(11)式求 K，G_i及任意 $\overline{L}$ 求 L；

步骤 4. 建立观测器方程(4)，(5).

以上设计方法对任意的$(E_0E_1E_2)\in \boldsymbol{R}^{n\times 3l}$均有效. 下面将给出$(E_0E_1E_2)$行降秩时干扰解耦观测器的一种设计方法.

记 $M=(E_0E_1E_2)$，$\overline{M}=(I_n-MM^g)$. 由引理知满足推论(18)式的 T 有一般解：$T=T^*\overline{M}$，T^* 为任意矩阵. 由(9)—(11)式得

$$K_0=LT^*\overline{M}+KC, \tag{26}$$

$$T^*\overline{M}A_i=F_iT^*\overline{M}+H_iC,\quad (i=0,1,2), \tag{27}$$

$$G_i=T^*\overline{M}B_i\quad (i=0,1,2). \tag{28}$$

观测器设计问题转化为对满足(8)式的 F_i，求满足(26)，(27)式中的 T^*，K，L，H_i，进而由(28)式求出 $G_i(i=0,1,2)$.

记 $\overline{M}A_i=\overline{A}_i$，利用矩阵的 Kronecker 乘积，则(27)式有

$$(I_{n1}\otimes\overline{A}_i^T-F_i\otimes\overline{M}^T)t^*=(I_{n1}\otimes C^T)h_i. \tag{29}$$

令

$$M\triangleq\begin{pmatrix} I_{n_1}\otimes\overline{A}_0^T-F_0\otimes\overline{M}^T \\ I_{n_1}\otimes\overline{A}_1^T-F_1\otimes\overline{M}^T \\ I_{n_1}\otimes\overline{A}_2^T-F_2\otimes\overline{M}^T \end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^{3n_1n\times n_1n}, N\triangleq\begin{pmatrix} I_{n_1}\otimes C^T & & \\ & I_{n_1}\otimes C^T & \\ & & I_{n_1}\otimes C^T \end{pmatrix}\in \boldsymbol{R}^{3n_1n\times 3n_1p},$$

$$t^* = (T_1^* T_2^* \cdots T_{n_1}^*)^T \in \boldsymbol{R}^{n_1 n},\ h = \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^{3n_1 p},\ h_i = (H_{i1} H_{i2} \cdots H_{in_1})^T \in \boldsymbol{R}^{n_1 p} (i=0,1,2);$$

T_j^*，H_{ij}分别是 T^*，H_i 的第 j 行($j=1,2,\cdots,n_1$)；则(29)式成为线性方程组

$$Mt^* = Nh. \tag{30}$$

通过控制 F_i使 $\operatorname{rank}M = \operatorname{rank}(M\ Nh) < n_1 n$，则作初等行变换得 $M't^* = N_1 h$，其中 M' 行满秩，且行数小于 $n_1 n$，可求得 t^*，h 以及 T^*，H_i. 对$((T^*\overline{M})^T\ C^T\ K_0^T)^T$作初等变换，并通过调整 T^* 中的基础解系使 $\operatorname{rank}(CT^*\overline{M}^T\ C^T) = \operatorname{rank}(CT^*\overline{M})^T\ C^T\ \overline{K}_0)$，则存在实可逆阵 P，Q 满足

$$P\begin{bmatrix} T^*\overline{M} \\ C \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} T_0^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ K_0 Q = (K_0^* \quad 0), \tag{31}$$

其中 T_0^* 为 q 阶可逆阵，$K_0^* \in \boldsymbol{R}^{n_2 \times q}$，$q = \operatorname{rank}((T^*\overline{M})^T C^T)$.

则

$$(L \quad K) = (K_0^* T_0^{*-1}\ X_0)P, \tag{32}$$

这里 $X_0 \in \boldsymbol{R}^{n_2 \times (n_1 + p - q)}$为任意矩阵.

算法 2.

步骤 1. 计算 $\overline{M}$ 及 $\overline{A}_i$，由引理确定 F_i使(8)式成立($i=0,1,2$)；

步骤 2. 由(30)式求 T^* 及 H_i，进而求 T；

步骤 3. 由(31)，(32)式求 L，K，并取 $G_i = TB_i$；

步骤 4. 建立观测器方程(4)和(5).

注. 当 E_i($i=0,1,2$)为 0，即系统无干扰时，此方法可用于一般观测器设计.

5 算例

设受干扰作用的 2DGM 如下：

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{5}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{10} \end{pmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = (-1 \quad 1),\quad E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

由算法 2，干扰解耦观测器为

$$\begin{aligned} z(i+1,j+1) = &\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{12} \end{pmatrix} z(i,j) + \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \end{pmatrix} z(i+1,j) + \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{40} \end{pmatrix} z(i,j+1) \\ &+ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} u(i,j) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(i+1,j) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(i,j+1) \end{aligned}$$

$$
+\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix} y(i,j) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} y(i+1,j) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} y(i,j+1),
$$

$$
w(i,j) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} z(i,j) + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} y(i,j).
$$

6 结束语

针对文[3]提出的 2 DGM 观测器的一般形式,研究了 2DGM 的干扰解耦观测器问题,指出了干扰解耦观测器满足的充要条件.基于此条件,给出了干扰解耦观测器的设计方法,该方法具有普遍性,特别是对干扰矩阵$(E_0E_1E_2)$行降秩情形提出了另一种设计方法.

参 考 文 献

[1] Conte G,Perdon A. A geometric approach to the theory of 2-D system. *IEEE Trans. Automat. Contr.* ,1988,**33**(10):946—950.

[2] Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Springer-verlag,1985,283—301.

[3] 邹云等.一般模型 2-D 系统的观测器设计理论.自动化学报,1994,**20**(4):385—393.

[4] 段广仁,强文义.线性系统的干扰解耦观测器设计.自动化学报,1994,**20**(5):598—552.

[5] 须田信英等.自动控制中的矩阵理论,曹长修译.北京:科学出版社,1979,349.

[6] 杨成梧等.一般 2-D 线性常系数离散状态空间模型渐近稳定性的一类 Lyapunov 方法.控制理论与应用,1993,**10**(1):87—92

[7] 方勇,杨成梧.二维离散系统的特征值配置.'92 中国控制与决策学术年会论文集,哈尔滨,1992,485—489.

[8] 杨成梧,方勇.2-D Roesser 模型的静态干扰解耦.自动化学报,1994,**20**(2):240—246.

THE OBSERVERS DESIGN OF DISTURBANCE DECOUPLING FOR 2-D SYSTEMS

FANG YONG

(*Dept. of Mathematics,Neijiang Normal College,Neijiang* 641002)

YANG CHENGWU

(*Power Engineering College,Nanjing University of Science and Technology,Nanjing* 210014)

Abstract In this paper,we discuss the conditions for observers design of disturbance decoupling of 2-D general state space models(2DGM)with the standard boundary condition(SBC). Necessary and sufficient conditions for the observers design of disturbance decoupling of 2DGM are established. The corresponding design approaches are proposed.

Key words 2-D systems,observers,disturbance decoupling.