



线性大系统递阶控制的一种新型逼近方法¹⁾

顾幸生 蒋慰孙

(华东理工大学自动化研究所 上海 200237)

摘 要

将文[1]提出的按段多重契比雪夫多项式系 (PMCP) 应用于线性大系统递阶控制算法的逼近计算, 将动态递阶控制转化为静态递阶优化, 获得了一种新型逼近算法. 仿真结果表明了该算法的有效性.

关键词: 大系统, 递阶控制, 函数逼近.

1 引言

正交函数作为一种强有力的逼近工具, 自七十年代引入控制领域, 近年来引起了人们的极大关注. 各类正交函数逼近方法被广泛应用于系统分析、参数辨识和最优控制中. 文[1]提出了 PMCP, 并研究了其基本性质和运算法则. 与其他正交函数系相比, 采用 PMCP 逼近, 既能减少计算量, 又能提高逼近精度. 这里先给出有关 PMCP 的一些新结果, 进而研究大系统递阶优化问题的 PMCP 逼近算法.

2 PMCP 的一些新结果

关于 PMCP 的定义、基本性质、运算法则及有关符号, 请参阅文[1], 此处从略. 记

$$L^2 = \left\{ f(t) : \|f(t)\| = \left[\int_{t_0}^{t_f} \bar{w}(t) f^2(t) dt \right]^{1/2} < +\infty \right\}. \quad (2.1)$$

此处 $\bar{w}(t)$ 为 PMCP 的加权函数, $[t_0, t_f]$ 为逼近区间. 设 $f(t), g(t) \in L^2$, 且可按 PMCP 展开为

$$f(t) \doteq \bar{f}(t) = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\Phi}(t), \quad g(t) \doteq \bar{g}(t) = \bar{\mathbf{g}}^T \bar{\Phi}(t).$$

此处 $\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{g}} \in \mathcal{R}^{N \cdot M \times 1}$ 为展开系数向量, $\bar{\Phi}(t) \in \mathcal{R}^{N \cdot M \times 1}$ 为 PMCP 向量, N, M 为逼近区间的分段数和每一子区间上的展开阶数. 并记

$\mathcal{P}[f(t)] = \bar{\mathbf{F}}^T, \mathcal{P}[g(t)] = \bar{\mathbf{g}}^T$, 则有:

$$1) \mathcal{P}[k_1 f(t) + k_2 g(t)] = k_1 \bar{\mathbf{F}}^T + k_2 \bar{\mathbf{g}}^T \quad (k_1, k_2 \in \mathcal{R}). \quad (2.2)$$

本文于 1992 年 8 月 25 日收到.

1) 本课题得到国家自然科学基金重点项目资助.

$$2) \mathcal{P}[f(t) \cdot g(t)] = \bar{F}^T \cdot \tilde{g}, \quad (2.3)$$

$$3) \mathcal{P}[f(t)/g(t)] = \bar{F}^T \cdot \tilde{g}^{-1}, \quad (2.4)$$

$$4) \mathcal{P}\left[\int_{t_0}^t f(s)ds\right] = \bar{F}^T \cdot P_m, \quad (2.5)$$

$$5) \mathcal{P}[df(t)/dt] = \bar{F}^T D_m, \quad (2.6)$$

$$6) \mathcal{P}[t \cdot f(t)] = \bar{F}^T \cdot H, \quad (2.7)$$

$$7) \mathcal{P}\left[\int_{t_f}^t f(s)ds\right] = \bar{F}^T \cdot R_m. \quad (2.8)$$

以上各式中 P_m, H, D_m, R_m 分别为 PMCP 的前向积分运算矩阵、元素乘积运算矩阵、微分运算矩阵和后向积分运算矩阵; $R_m = P_m - Q_m, \int_{t_0}^{t_f} \bar{\Phi}(s)ds = Q_m \bar{\Phi}(t)$; \tilde{g} 为乘积矩阵.

$$8) \text{ 若 } \mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^{m \times 1}, A(t) \in \mathcal{R}^{n \times m}, \text{ 且 } x_i(t), a_{ij}(t) \in L^2, \text{ 记 } \mathcal{P}_m[A(t)] = \bar{A}, \text{ 则}$$

$$\mathcal{P}[A(t)\mathbf{x}(t)] = \bar{A}\tilde{\mathbf{x}}, (\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_i)). \quad (2.9)$$

$$9) \mathcal{P}_m\left[\int_{t_0}^t A(s)ds\right] = \bar{A}[I_m \otimes P_m]. \quad (2.10)$$

$$10) \mathcal{P}_m[tA(t)] = \bar{A}[I_m \otimes H]. \quad (2.11)$$

$$11) \text{ 若 } A(t) \in \mathcal{R}^{n \times m}, B(t) \in \mathcal{R}^{m \times p}, \text{ 且 } a_{ij}(t) \in L^2, b_{ij}(t) \in L^2, \text{ 则}$$

$$\mathcal{P}_m[A(t)B(t)] = \bar{A}\tilde{B}, (\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})). \quad (2.12)$$

以上各式中 I_m 为 $m \times m$ 维单位矩阵, \otimes 为 Kronecker 乘积运算符号.

3 大系统递阶控制的 PMCP 逼近算法

设线性定常大系统被描述为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = A_i \mathbf{x}_i(t) + B_i \mathbf{u}_i(t) + C_i \mathbf{z}_i(t), \\ \mathbf{z}_i(t) = \sum_{j=1}^N L_{ij} \mathbf{x}_j(t), \\ \mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{i0}, i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.1)$$

此处 $\mathbf{x}_i(t) \in \mathcal{R}^{n_i \times 1}, \mathbf{u}_i(t) \in \mathcal{R}^{r_i \times 1}$ 分别为子系统 i 的状态和控制, $\mathbf{z}_i(t) \in \mathcal{R}^{m_i \times 1}$ 为关联向量, $A_i, B_i, C_i, L_{ij} (i = 1, 2, \dots, N)$ 为系数矩阵. 目标函数为

$$J = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_i(t_f)\|_{P_i}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\|\mathbf{x}_i(t)\|_{Q_i}^2 + \|\mathbf{u}_i(t)\|_{R_i}^2] dt \right\}. \quad (3.2)$$

其中 $P_i, Q_i \geq 0, R_i > 0$.

采用关联预测法, 上述大系统最优控制问题可化为如下二级优化.

第一级, 子系统优化:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}_i(t)} J_i = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_i(t_f)\|_{P_i}^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_i\|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_i\|_{R_i}^2 + \lambda_i^{*T} \mathbf{z}_i^* + \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{x}_i(t) \right] dt, \\ s.t. \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i(t) = A_i \mathbf{x}_i(t) + B_i \mathbf{u}_i(t) + C_i \mathbf{z}_i^*(t), \\ \mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{i0}, \end{cases} \\ i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.3)$$

此处 $\mu_i(t) = -\sum_{j=1}^N L_{ji}^T \lambda_j^*(t)$, λ_i^* , z_i^* 为已知.

第二级, 协调器:

$$\begin{bmatrix} \lambda_i^*(t) \\ z_i^*(t) \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} -C_i^T p_i(t) \\ \sum_{j=1}^N L_{ij} x_j(t) \end{bmatrix}^k \quad (3.4)$$

式中 p_i 为伴随向量, 由下式决定:

$$\dot{p}_i(t) = -Q_i x_i(t) - A_i^T p_i(t) - \mu_i(t). \quad (3.5)$$

在第一级中, 因 λ_i^* , z_i^* 为已知, 故目标函数可写成:

$$J'_i = J_i - \int_{t_0}^{t_f} \lambda_i^{*T} z_i^* dt = \frac{1}{2} \|x_i(t_f)\|_{P_i}^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{1}{2} \|x_i\|_{Q_i}^2 + \frac{1}{2} \|u_i\|_{R_i}^2 + \mu_i^T x_i \right] dt. \quad (3.6)$$

采用 PMCP 逼近技术求解. 将上述二级优化中的变量以 PMCP 为基函数展开, 得

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{l=0}^{M'-1} \bar{y}_{kl}^i \bar{\varphi}_{kl}(t) = \bar{Y}_i \bar{\Phi}(t). \quad (3.7)$$

这里 $y_i(t)$ 分别表示 $x_i(t)$, $x_i(t_0)$, $u_i(t)$, $p_i(t)$, $z_i(t)$, $\lambda_i(t)$ 和 $\mu_i(t)$, 令

$$\bar{y}_i = \text{vec}(\bar{Y}_i). \quad (3.8)$$

式中符号 $\text{vec}(\cdot)$ 表示矩阵按行拉直运算. 令

$$\begin{cases} \hat{A}_i = (I - A_i \otimes P_m^T)^{-1}, \hat{B}_i = \hat{A}_i (B_i \otimes P_m^T), \hat{C}_i = C_i \otimes P_m^T, \\ \hat{R}_i = R_i \otimes W, \hat{Q}_i = Q_i \otimes W + P_i \otimes \Psi, \hat{S}_i = I_{n_i} \otimes W. \end{cases} \quad (3.9)$$

式中 $\Psi = \bar{\Phi}(t_f) \bar{\Phi}^T(t_f)$, $W = \int_{t_0}^{t_f} \bar{\Phi}(t) \bar{\Phi}^T(t) dt$, 则第一级子系统动态优化可化成如下静态优化问题:

$$\begin{cases} \min_{\hat{u}_i} J' = \frac{1}{2} (\hat{x}_i^T \hat{Q}_i \hat{x}_i + \hat{u}_i^T \hat{R}_i \hat{u}_i) + \hat{\mu}_i^T \hat{S}_i \hat{x}_i, \\ s.t. \\ \hat{x}_i = \hat{A}_i \hat{x}_{i0} + \hat{B}_i \hat{u}_i + \hat{C}_i \hat{z}_i^*, i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.10)$$

其解为

$$\begin{cases} \hat{x}_i = K_{1i} \hat{x}_{i0} + K_{2i} \hat{z}_i^* + K_{3i} \hat{\mu}_i^*, \\ \hat{u}_i = -K_{x_i} \hat{x}_i - K_{\mu_i} \hat{\mu}_i^*, \\ \hat{p}_i = -\hat{Q}_i \hat{x}_i - \hat{S}_i \hat{\mu}_i^*, \\ \hat{\mu}_i^* = -\left(\sum_{j=1}^N L_{ji}^T \otimes I \right) \hat{\lambda}_i^*, i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.11)$$

此处

$$\begin{cases} K_{x_i} = \hat{R}_i^{-1} \hat{B}_i^T \hat{Q}_i, K_{\mu_i} = \hat{R}_i^{-1} \hat{B}_i^T \hat{S}_i, K_i = (I + \hat{B}_i \hat{R}_i^{-1} \hat{B}_i^T \hat{Q}_i)^{-1}, \\ K_{1i} = K_i \hat{A}_i, K_{2i} = K_i \hat{C}_i, K_{3i} = -K_i K_{\mu_i}, i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (3.12)$$

矩阵 $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{R}_i, \hat{Q}_i, \hat{S}_i, K_i, K_{1i}, K_{2i}, K_{3i}, K_{x_i}, K_{\mu_i}$ 均为常值矩阵, 在迭代过程中保持不变, 故可预先计算, 存入内存, 需要时直接调用即可.

第二级协调向量的展开系数向量可按下式计算:

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}_i^* \\ \hat{z}_i^* \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} -(C_i^T \otimes I) \hat{p}_i \\ \sum_{j=1}^N (I \otimes L_{ij}^T) \hat{x}_j \end{bmatrix}^k, i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.13)$$

关联误差为

$$e = e_z + e_\lambda = (t_f - t_0)^{-1} \sum_{i=1}^N \{tr[W(\bar{Z}_i^{k+1} - \bar{Z}_i^k)^T(\bar{Z}_i^{k+1} - \bar{Z}_i^k)] + tr[W(\bar{\Lambda}_i^{k+1} - \bar{\Lambda}_i^k)^T(\bar{\Lambda}_i^{k+1} - \bar{\Lambda}_i^k)]\}. \quad (3.14)$$

式中 $\bar{Z}_i^{k+1} - \bar{Z}_i^k, \bar{\Lambda}_i^{k+1} - \bar{\Lambda}_i^k$ 为后次迭代与前次迭代之差; $tr(\cdot)$ 为矩阵求迹运算符。

目标函数为

$$\bar{J}_{\min} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [tr(\hat{x}_i^* \hat{x}_i^{*T} \hat{Q}_i) + tr(\hat{u}_i^* \hat{u}_i^{*T} \hat{R}_i)]. \quad (3.15)$$

\hat{x}_i^*, \hat{u}_i^* 为最优逼近解。

4 仿真研究

考虑某河流污染控制问题, 系统的动态方程为^[2]

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1.32 & 0 & 0 & 0 \\ -0.32 & -1.2 & 0 & 0 \\ \hline 0.9 & 0 & -1.32 & 0 \\ 0 & 0.9 & -0.32 & -1.2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t). \quad (4.1)$$

这两段模型中, 每一河段(子系统)有两个状态: x_{i1} 是生化氧需求量的浓度(B.O.D.); x_{i2} 是溶氧的浓度(D.O.) ($i = 1, 2$); 其控制 u_{11}, u_{21} 是释放到河里的 B.O.D.. 二次型目标函数为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^5 [\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] dt, \quad (4.2)$$

式中 $\mathbf{Q} = \text{diag}(1, 2, 1, 2), \mathbf{R} = \text{diag}(1, 1)$, 初始状态为 $\mathbf{x}(0) = [1, 0.5, 1, 0.5]^T$. 该系统由两个子系统组成, 如虚线所示。采用上述二级递阶逼近算法(取 $N' = 2, M' = 4$) 进

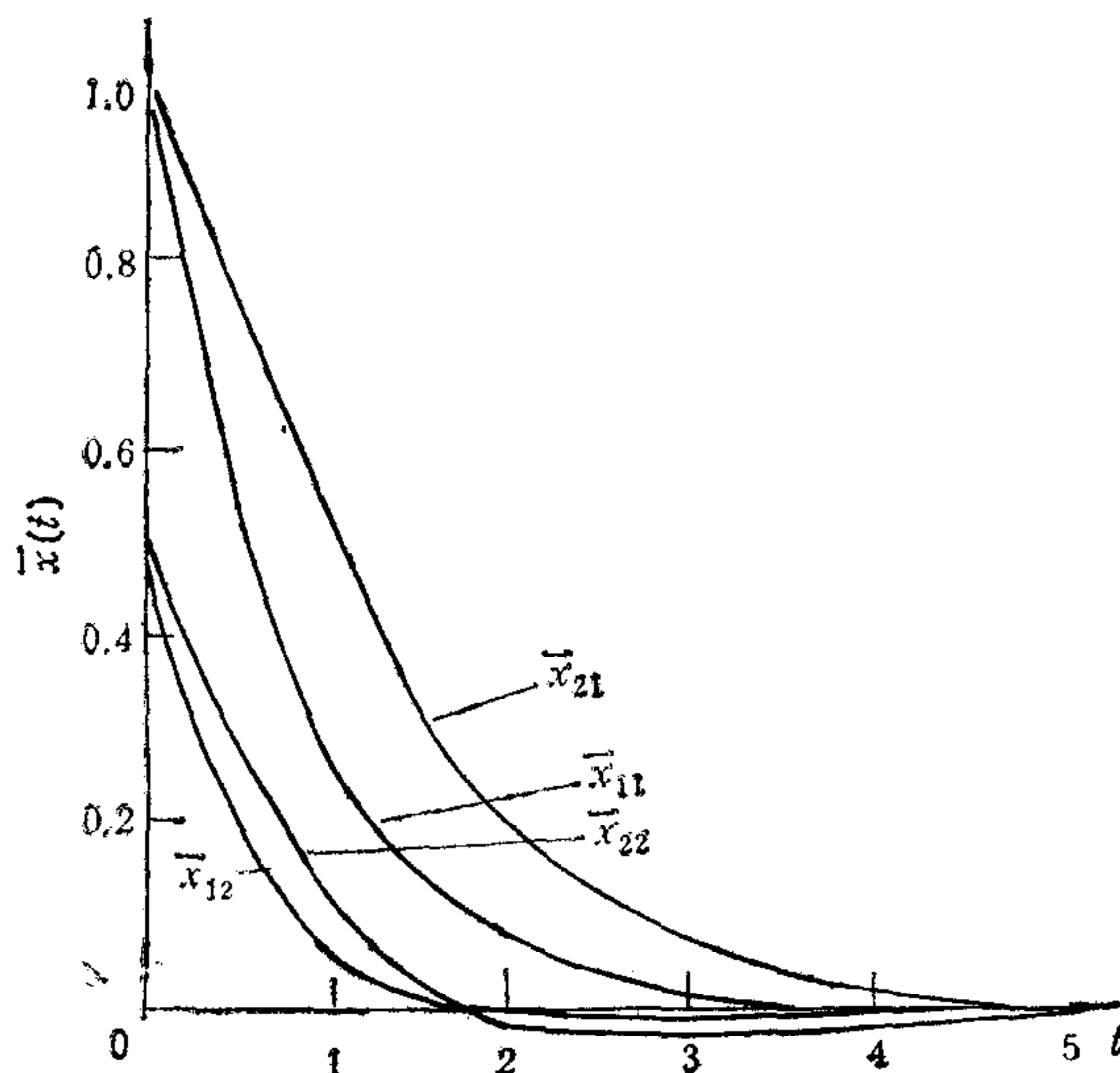


图1 示例的仿真结果 $\bar{x}(t)-t$ 图

行仿真计算,结果见图1—3所示,其中图3给出了迭代过程中的收敛情况。由图可见,迭代到第六步时,关联误差 e 已降至 2.26×10^{-13} ,最优目标函数为 $\bar{J}_{\min} = 0.7143092$ 。如采用集中控制, J_{\min} 的精确值 $J_{\min}^0 = 0.7132^{[2]}$ 。逼近计算结果与精确值之相对误差为 $(\bar{J}_{\min} - J_{\min}^0)/J_{\min}^0 = 0.164\%$ 。由于集中控制和递阶控制所得逼近解非常接近,在图中难以区别。因此,仿真结果说明逼近算法的有效性。

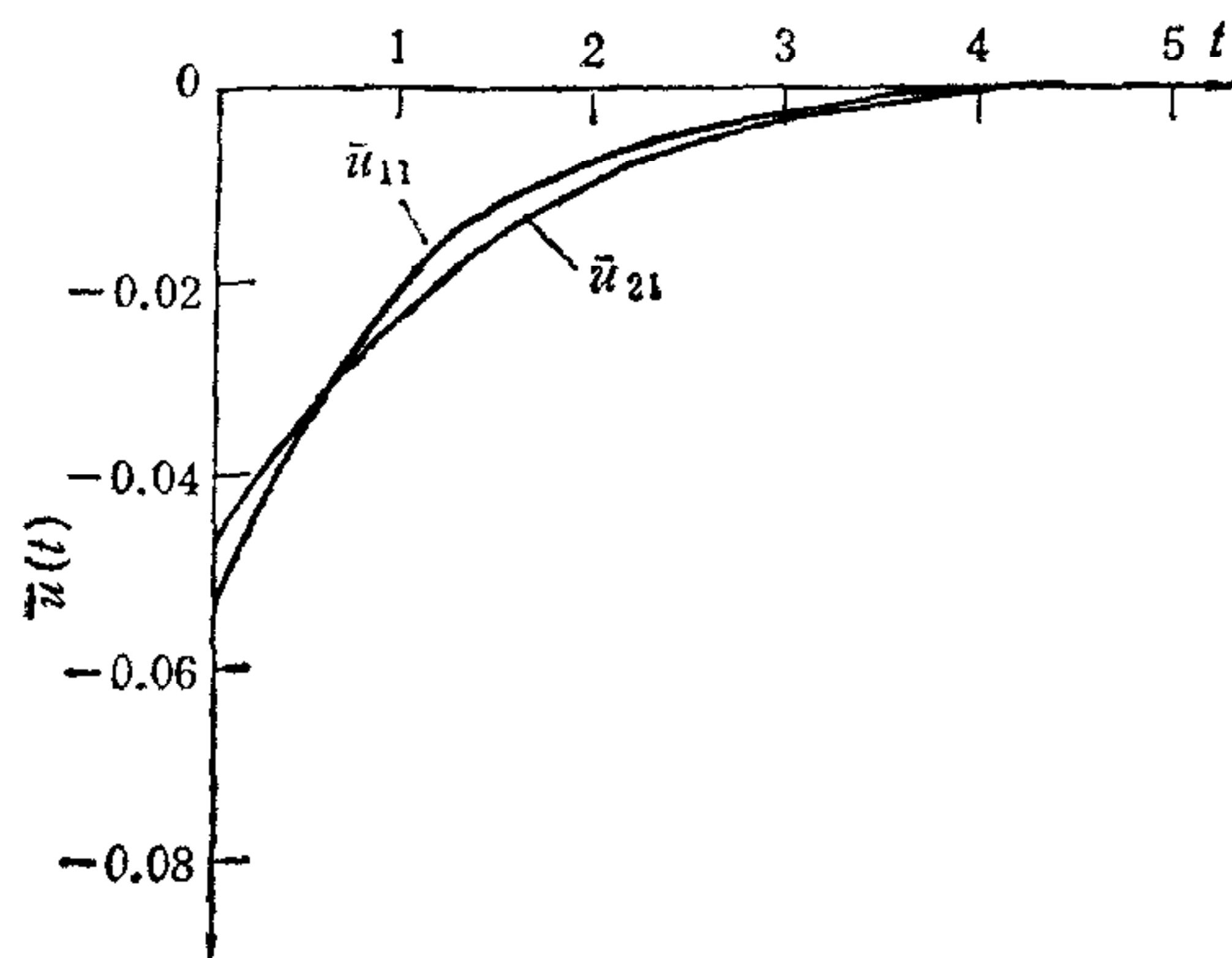


图2 示例的仿真结果 $\bar{u}(t)-t$ 图

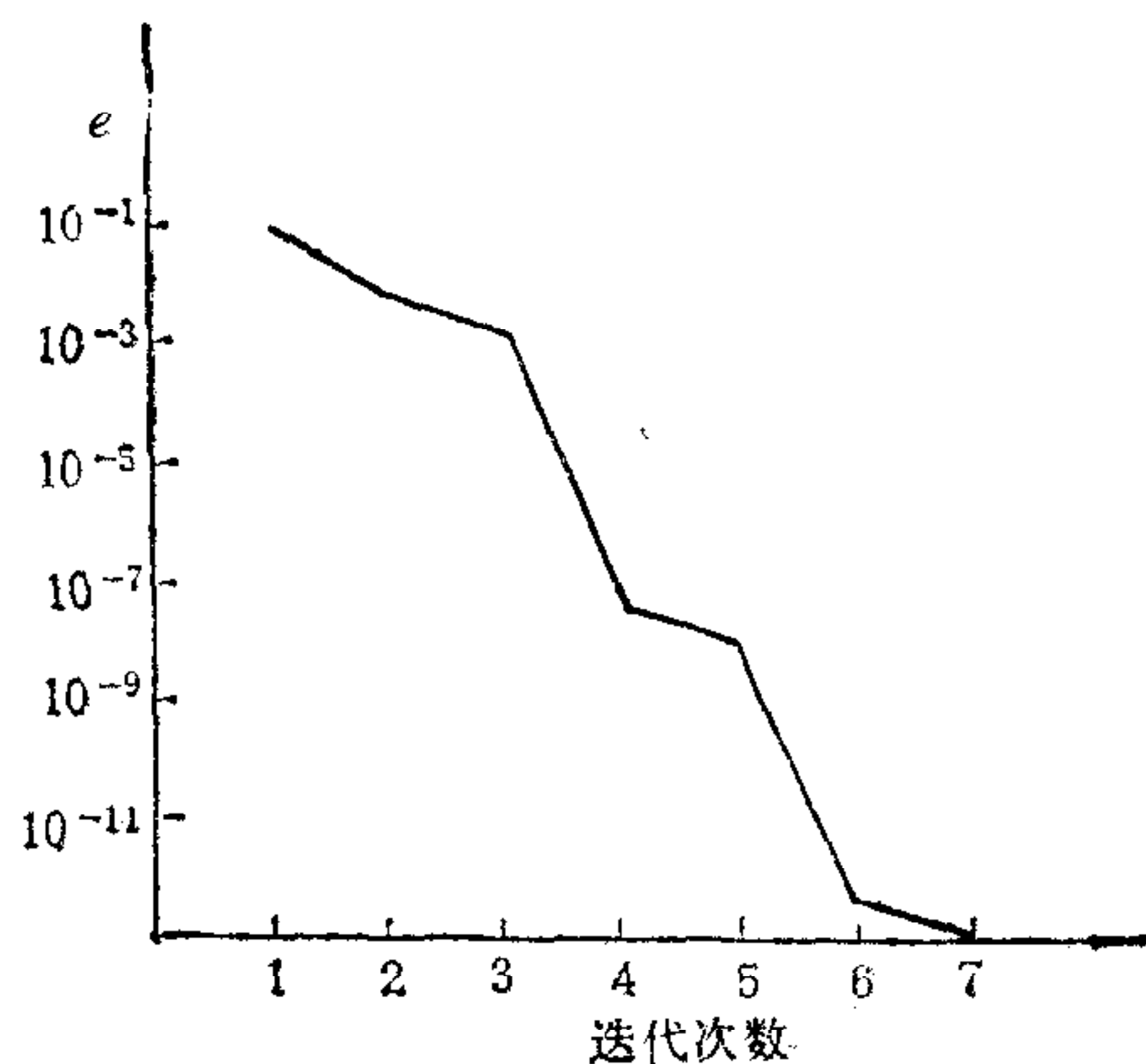


图3 关联误差与迭代次数

参 考 文 献

- [1] 顾幸生,胡仰曾. 按段多重契比雪夫多项式系及其在线性时变系统辨识中的应用. 自动化学报,1990,16(5): 400—407.
 [2] 李人厚,邵福庆. 大系统的递阶与分散控制. 西安交通大学出版社,1986.

A NEW APPROACH TO APPROXIMATION OF HIERARCHICAL CONTROL OF LINEAR LARGE SCALE SYSTEMS

GU XINGSHENG JIANG WEISUN

(Research Institute of Automatic Control, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237)

ABSTRACT

In this paper, PMCP introduced in [1] is deeply investigated, and is applied to approximation of hierarchical control of linear large scale systems. The dynamic hierarchical control problem has been converted to stationary hierarchical optimization by means of PMCP and a new approximation algorithm has been obtained. The illustrative example has shown high effectiveness of the algorithm.

Key words: Large scale systems, hierarchical control, function approximation.