第23卷 第2期
1997年3月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 23, No. 2
March, 1997

短 文

# 同阶线性系统在 Kharitonov 空间的同时镇定

赵明旺

（武汉冶金科技大学自动化系 武汉 430081）

**摘 要** 运用 Kharitonov 定理给出一个期望的闭环特征区间多项式，然后将同阶线性系统的同时镇定问题化成一组线性不等式的求解，并给出求解该不等式组的线性规划法，讨论了三种解的意义和性质. 算例表明该方法的有效性.

**关键词** 同时镇定，线性规划，不等式，区间多项式.

## 1 引言

给定有限个对象是否存在一个控制器同时镇定它们?这是鲁棒控制和容错控制中的一个重要问题，有较强的实用背景. 如系统在不同工作点得到的模型是不同的，存在测量器或执行器故障时的模型亦是不同的. 近10年来，该问题得到控制界的极大重视，文献[1—3]对此有深入探讨，但目前为止仅有两个对象的同时镇定问题得到解决.

本文讨论同阶线性系统的同时镇定问题. 该问题有较强的实际背景. 如存在测量器或执行器故障时的模型大多是同阶的，文献[4]证明 SISO 区间系统用一阶控制器同时镇定的充要条件是同时镇定同阶的16个顶点对象等等.

## 2 问题描述及求解方法

考虑如下 $r$ 个 $n$ 阶的 SISO 线性定常连续系统的传递函数模型：

$$G_i(s) = \frac{N_i(s)}{D_i(s)} = \frac{b_{i,1}s^{n-1} + \cdots + b_{i,n}}{s^n + a_{i,1}s^{n-1} + \cdots + a_{i,n}}, \quad i = 1,2,\cdots,r. \tag{1}$$

其中 $a_{i,j}$和 $b_{i,j}$为第 $i$ 个系统的传递函数的系数.

这里考虑的问题是对(1)式所示的 $r$ 个同阶线性系统是否存在同一控制器

$$G_c(s) = \frac{N_c(s)}{D_c(s)} = \frac{\beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \cdots + \beta_m}{s^m + \alpha_1 s^{m-1} + \cdots + \alpha_m}. \tag{2}$$

其中 $\alpha_i$ 和 $\beta_i$ 为控制器 $G_c(s)$的传递函数的待定参数，使得闭环系统的特征多项式

$$D_c(s)D_i(s) + N_c(s)N_i(s) = s^{n+m} + (a_{i,1} + \alpha_1 + b_{i,1}\beta_0)s^{n+m-1}$$

收稿日期：1995-04-26

$$
\begin{aligned}
&+ (a_{i,2} + a_{i,1}\alpha_1 + \alpha_2 + b_{i,2}\beta_0 + b_{i,1}\beta_1)s^{n+m-2} + \cdots \\
&+ (a_{i,n}\alpha_m + b_{i,n}\beta_m), \quad i = 1,2,\cdots,r.
\end{aligned} \tag{3}
$$

同时稳定在如下期望的稳定区间多项式内：

$$
f_e(s) = s^{n+m} + e_1 s^{n+m-1} + \cdots + e_{n+m}, \quad e_i^- \leqslant e_i \leqslant e_i^+. \tag{4}
$$

由 Kharitonov 定理可知，区间多项式 $f_e(s)$ 稳定的充要条件为其四个顶点多项式稳定. 因此，对同阶系统的同时镇定问题，可先由 Kharitonov 定理给出一稳定的区间多项式，然后求同一控制器 $G_c(s)$ 使同阶被控系统的闭环特征多项式配置在该区间多项式内. 根据上述思想和极点配置技术，同时镇定控制器的计算步骤如下：

1）先根据期望的性能品质指标，由 Kharitonov 定理给出闭环区间多项式 $f_e(s)$.

2）由闭环多项式(3)和期望的区间多项式 $f_e(s)$，得到关于控制器 $G_c(s)$ 的参数的不等式

$$
\boldsymbol{k}_i^- \leqslant A_i \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{k}_i^+, \quad i = 1,2,\cdots,r. \tag{5}
$$

其中

$$
\boldsymbol{x} = [\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_m \ \beta_0 \ \cdots \ \beta_m]^\tau.
$$

$$
\boldsymbol{k}_i^+ = [e_1^+ - a_{i,1} \ \cdots \ e_n^+ - a_{i,n} \ e_{n+1}^+ \ \cdots \ e_{n+m}^+]^\tau,
$$

$$
\boldsymbol{k}_i^- = [e_1^- - a_{i,1} \ \cdots \ e_n^- - a_{i,n} \ e_{n+1}^- \ \cdots \ e_{n+m}^-]^\tau,
$$

$$
A_i = \left[\begin{array}{ccc:ccc}
1 & & & b_{i,1} & & \\
a_{i,1} & \ddots & & b_{i,2} & \ddots & \\
\vdots & \ddots & 1 & \vdots & \ddots & b_{i,1} \\
a_{i,n} & \ddots & a_{i,1} & b_{i,n} & \ddots & b_{i,2} \\
 & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 & & a_{i,n} & & & b_{i,n}
\end{array}\right]_{(n+m)\times(2m+1)}
$$

3）求解 $r$ 个代数不等式组(5)，则可求得同时镇定问题的控制器 $G_c(s)$ 的参数 $\alpha_i$ 和 $\beta_i$. 若不等式(5)无解，则返回第1步，重新选择适当的稳定区间多项式，再求解不等式(5).

从上述算法可知，只要利用 Kharitonov 定理适当地选择稳定的区间多项式，使其包含的稳定区域足够大，则本文方法可以视为解决同阶系统的同时镇定问题的有效的实用计算方法.

## 3 不等式组的线性规划求解方法

根据优化理论中线性规划法，不等式组(5)可化为如下标准线性规划问题：

$$
\max \quad J = \boldsymbol{c}_0^\tau(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) + \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{c}_{i,1}^\tau \boldsymbol{z}_{i,1} + \boldsymbol{c}_{i,2}^\tau \boldsymbol{z}_{i,2}), \tag{6}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases}
A_i(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{z}_{i,1} = \boldsymbol{k}_i^+, \\
A_i(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{z}_{i,2} = \boldsymbol{k}_i^-, \\
\boldsymbol{x}_1 \geqslant 0, \quad \boldsymbol{x}_2 \geqslant 0, \quad \boldsymbol{z}_{i,1} \geqslant 0, \quad \boldsymbol{z}_{i,2} \geqslant 0,
\end{cases} \quad i = 1,2,\cdots,r. \tag{7}
$$

其中 $\boldsymbol{c}_0$，$\boldsymbol{c}_{i,1}$ 和 $\boldsymbol{c}_{i,2}$ 分别为 $2m+1$ 维，$n+m$ 维和 $n+m$ 维加权向量；$\boldsymbol{z}_{i,1}$ 和 $\boldsymbol{z}_{i,2}$ 为 $n+m$ 维松弛变量向量；$\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 为 $2m+1$ 维变量向量，并有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2$. 该规划问题共有 $2r(n+m)$ 个约束条件，$2r(n+m)+4m+2$ 个变量. 由于线性规划算法较成熟，其应用程序可解上千的变

量以及约束条件的问题. 因此,该问题的求解并不困难.

对加权向量 $c_0$,$c_{i,1}$和 $c_{i,2}$的意义和取值,有如下讨论: 1) 引入加权向量的目的是想将求解不等式化为线性规划问题,利用已有的算法求解. 其实亦可以利用线性规划求可行解的算法解不等式(5).

2) 当 $c_{i,1}$的各元素为正数,而 $c_{i,2}$的各元素为负数,则线性规划的解使 $A_i x$ 比较接近 $k_i^-$,即 $r$ 个闭环多项式比较接近 Kharitonov 区间多项式的下确界. 此时,记相应的解为 $x^-$, $z_{i,1}^-$和 $z_{i,2}^1$.

类似地,当 $c_{i,2}$的各元素为正数,而 $c_{i,1}$的各元素为负数,则表示相应的解使 $A_i x$ 比较接近 $k_i^+$,即 $r$ 个闭环多项式比较接近区间多项式的上确界. 此时,记解为 $x^+$, $z_{i,1}^+$和 $z_{i,2}^+$.

由于上述两个解使闭环特征多项式接近于 Kharitonov 区间多项式的界,使闭环稳定性对参数摄动较敏感,因此考虑到本问题的线性性,可取解为上述两种解的如下加权平均解:

$$x^* = \lambda x^- + (1-\lambda)x^+, \quad z_{i,1}^* = \lambda z_{i,1}^- + (1-\lambda)z_{i,1}^+, \quad z_{i,2}^* = \lambda z_{i,2}^- + (1-\lambda)z_{i,2}^+. \tag{8}$$

其中 $\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$为加权系数. 由于不等式(5)的线性性,该加权解亦为同时镇定问题的解(证明略),并将使 $r$ 个闭环多项式接近于区间多项式的中心位置,对参数摄动具有较好的鲁棒性.

## 4 算例

**例1.** 考虑如下3个1阶系统的同时镇定问题:

$$G_1(s)=\frac{-1}{s+2}, \quad G_2(s)=\frac{2}{s}, \quad G_3(s)=\frac{3}{s-2}.$$

选择控制器为一阶系统,相应的闭环特征多项式为二阶多项式. 因此,可选择稳定的 Kharitonov 区间多项式为 $s^2+[1,100]s+[1,100]$. 由本文的算法可得

$$G_c^+(s)=\frac{9.167s+50}{s+74.5}, \quad G_c^-(s)=\frac{0.667s+1}{s+1}, \quad G_c^*(s)=\frac{4.917s+25.5}{s+37.75}.$$

其中 $G_c^+(s)$和 $G_c^-(s)$分别为使闭环特征多项式接近区间多项式的上界和下界的控制器, $G_c^*(s)$为 $G_c^+(s)$和 $G_c^-(s)$对应参数的平均值构成的控制器. 经验算,上述三种控制器使本例的3个被控对象的闭环特征多项式分别配置为

$$G_c^+(s): s^2+67.33s+99, \quad s^2+92.83s+100, \quad s^2+100s+1,$$
$$G_c^-(s): s^2+2.333s+1, \quad s^2+3.667s+2, \quad s^2+s+1,$$
$$G_c^*(s): s^2+34.83s+50, \quad s^2+48.25s+51, \quad s^2+50.5s+1.$$

**例2.** 考虑如下3个二阶系统的同时镇定问题:

$$G_1(s)=\frac{s}{s^2+s+1}, \quad G_2(s)=\frac{2}{s^2+s-1}, \quad G_3(s)=\frac{s+2}{s^2-s+2}.$$

选择控制器为一阶系统,稳定区间多项式为 $s^3+[3,17]s^2+[6,17]s+[3,17]$,可得

$$G_c^+(s)=\frac{7.08s+4.67}{s+3.83}, \quad G_c^-(s)=\frac{2s+3}{s+3}, \quad G_c^*(s)=\frac{4.54s+3.83}{s+3.42}.$$

经验算,上述三种控制器使本例的3个被控对象的闭环特征多项多分别配置为

$G_c^+(s)$： $s^3+11.92s^2+9.5s+3.83$， $s^3+4.83s^2+17s+5.5$， $s^3+9.92s^2+17s+17$，

$G_c^-(s)$： $s^3+6s^2+7s+3$， $s^3+4s^2+6s+3$， $s^3+4s^2+6s+12$，

$G_c^*(s)$： $s^3+8.96s^2+8.25s+3.42$， $s^3+4.42s^2+11.5s+4.25$， $s^3+6.96s^2+11.5s+14.5$.

显然，上述两例的闭环特征多项式都配置在给定的 Kharitonov 稳定区间多项式内，表明本文方法有一定的实用价值.

本文方法是一个充分性方法，能否求得同时镇定控制器在于 Kharitonov 稳定区间多项式的选取、如何改进该区间多项式的选取、降低本文方法的保守性，有待于进一步研究.

## 参 考 文 献

[1] Emre E. Simultaneous stabilization with fixed closed-loop characteristic polynomial. *IEEE Trans. Aut. Control*, 1983,**28**: 103—104.

[2] Kabamba P T, Yang C. Simultaneous controller design for linear time-invariant systems. *IEEE Trans. Aut. control*, 1991,**36**:107—111.

[3] 贾英民. 四个对象的同时镇定与超越方程有解的等价性. 见:1994年中国控制会议论文集，北京:中国科学技术出版社，1994,96—99.

[4] Barmish B R *et al.* Extreme ponit results for robust stabalization of interval plants with first order compensators, *IEEE Trans. Aut. Control*, 1992, **37**: 707—714.

# SIMULTANEOUS STABILIZATION IN KHARITONOV SPACE FOR LINEAR SYSTEMS WITH SAME ORDERS

ZHAO MINGWANG

(*Dept. of Automation, Wuhan Metallology University of Science and Technology, Wuhan* 430081)

**Abstract** According to Kharitonov theorem, an expected characteristic polynomial of the close-loop systems is given and the simultaneous stabilization problem of linear systems with same order is transformed into solving problem of a set of inequalities. And then a linear programing method for the inequalities is studied and third kinds of solutions of the problem and their properties are discussed. Examples demonstrate the effectiveness of the stabilization method.

**Key words** Simultaneous stabilization, linear programing, inequalities, interval polynomial.