第 28 卷 第 2 期
2002 年 3 月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 28, No. 2
Mar., 2002

短文

输入受限系统的滚动时域预测控制[1)]

王 伟[1] 杨建军[2]

[1](大连理工大学信息与控制中心 大连 116024)

[2](清华大学自动化系 北京 100084)

(E-mail: wangwei@dlut.edu.cn, w_yjj114@cims.tsinghua.edu.cn)

摘 要 针对输入受限系统,提出滚动时域预测控制方法,用线性矩阵不等式和不变椭圆集处理输入受限问题,给出稳定性和可行性条件,并用半正定规划求解控制律.仿真例子表明了本文方法的优点.

关键词 输入受限系统,线性矩阵不等式,稳定性,可行性

中图分类号 TP13

RECEDING HORIZON PREDICTIVE CONTROL FOR SYSTEMS WITH INPUT CONSTRAINTS

WANG Wei[1] YANG Jian-Jun[2]

[1](*Research Center of Information and Control, Dalian University of Technology, Dalian* 116024)

[2](*Department of Automation, Tsinghua University, Beijing* 100084)

(E-mail: wangwei@dlut.edu.cn, w_yjj114@cims.tsinghua.edu.cn)

Abstract A receding horizon predictive control method is proposed for systems with input constraints. Linear matrix inequality and invariant ellipsoidal sets are utilized to deal with the input constraint problems. Stability and feasibility conditions are presented in this paper. Semi-positive definite programming is used to solve the control law. The advantages of the method are shown by simulations.

Key words System with input constraint, linear matrix inequality, stability, feasibility

1 引言

双模控制结构使输入受限系统具有稳定性和可行性[1]. 该方法首先假设系统输入不受

1) 国家杰出青年基金(69825106)和教育部高等学校骨干教师资助计划资助

收稿日期 1999-12-27 收修改稿日期 2001-02-26

限,设计状态反馈控制器使闭环系统稳定.然后为处理输入受限问题,在状态反馈控制律的基础上增加一项辅助变量,根据辅助变量的长度扩展状态向量,使其包含辅助变量序列,得到扩展的自主系统,最后通过极小化辅助变量序列的范数求解控制律.该方法的一个优点是大部分计算过程都离线进行,大大减少了算法的在线计算量.但是文献[1]提出的鲁棒预测控制算法(Robust Predictive Control, RPC)计算量的减少是以减小初始状态的允许集为代价的,它离线给出的稳定性和可行性条件限制了辅助变量的自由空间,使得控制律较为保守.对此,本文提出了滚动时域豫测控制方法(Receding Horizon Predictive Control, RHPC),它基于闭环状态方程进行预测,在状态进入不变集之前,用半正定规划在线求解控制律,保证算法的稳定性和可行性,增大了辅助变量的自由空间,扩大了初始状态的允许集,提高了控制性能.

2 滚动时域预测控制

考虑输入受限的 SISO 系统

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t, \quad y_t = Cx_t, \quad -\bar{u} \leqslant u \leqslant \bar{u} \tag{1}$$

其中 $x \in R^n$, 设计状态反馈控制律

$$u_t = \boldsymbol{K}x_t \tag{2}$$

当不考虑受限时,控制律(2)保证系统(1)闭环稳定,并在一定意义上是最优的.当输入受限时,控制器性能变坏,甚至不能保证闭环系统的稳定性.因此为解决输入受限问题,在稳定状态反馈控制律(2)上外加一辅助变量,即

$$u_t = \boldsymbol{K}x_t + \boldsymbol{E}\boldsymbol{d}_t \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{E}=[1,0,\cdots,0]$, $\boldsymbol{d}_t=[d_t,d_{t+1},\cdots,d_{t+N-1}]^{\mathrm{T}}$ 为辅助变量序列.把式(3)代入式(1)得

$$x_{t+1} = (A + \boldsymbol{BK})x_t\boldsymbol{BE}\boldsymbol{d}_t = \Psi x_t\boldsymbol{BE}\boldsymbol{d}_t \tag{4}$$

通过调节 $\boldsymbol{d}_t$, 使 u_t 满足约束条件 $-\bar{u}\leqslant u_t\leqslant\bar{u}$,并能保证系统闭环稳定.由于 $\boldsymbol{d}_t$ 是在最优控制律(2)上增加的一补偿项,当输入受限条件不起作用时,最优控制策略要求 $\boldsymbol{d}_t=0$. 因此一个很显然的策略就是在保证可行的前提下, $\boldsymbol{d}_t$ 越小越好.

根据式(3)预测将来时刻的控制输入

$$u_{t+j|t} = \boldsymbol{K}x_{t+j|t} + d_{t+j}, \quad j = 0,1,\cdots,N-1 \tag{5}$$

其中 $x_{t+j|t}$ 是 $t+j$ 时刻的状态预测值. 当 $j=0$ 时, 即为控制律(3). 由式(4)可得

$$x_{t+j|t} = \Psi^j x_t + \Psi^{j-1}\boldsymbol{B}d_t + \cdots + \boldsymbol{B}d_{t+j-1}, \quad j = 1,2,\cdots,N \tag{6}$$

$x_{t|t}$为当前时刻的状态值.

定义椭圆集

$$S_x = \{x \mid x^{\mathrm{T}}P_x x \leqslant 1\} \tag{7}$$

其中 P_x 为正定矩阵且满足不变性和可行性条件

$$\Psi^{\mathrm{T}}P_x\Psi \leqslant P_x, \quad KP_x^{-1}K^{\mathrm{T}} \leqslant \bar{u}^2 \tag{8}$$

即集合 S_x 为不变可行集.

滚动时域预测控制方法的主要思想是使系统状态在辅助变量 $\boldsymbol{d}_t$ 的作用下,在 N 步之后进入不变集 S_x,即 $x_{t+N|t}\in S_x$,且同时满足可行性条件

$$|u_{t+j|t}| \leqslant \bar{u}, \quad j = 0,\cdots,N-1 \tag{9}$$

当状态进入 S_x 后,辅助变量 $\boldsymbol{d}_t$ 就变成零,这时最优状态反馈控制律 $u_t=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_t$ 就可以保证稳定性和可行性.

把 $\boldsymbol{x}_{t+N|t}$ 写成下面的形式

$$\boldsymbol{x}_{t+N|t} = \boldsymbol{\Psi}^N \boldsymbol{x}_t + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\Psi}^{N-j} \boldsymbol{BEM}^{j-1} \boldsymbol{d}_t \tag{10}$$

令 $P_1=\boldsymbol{\Psi}^N$, $P_2=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\Psi}^{N-j}\boldsymbol{BEM}^{j-1}$, 由 $\boldsymbol{x}_{t+N|t}\in S_x$,得

$$\boldsymbol{x}_{t+N|t}^{\mathrm{T}} P_x \boldsymbol{x}_{t+N|t} = \boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}} P_1^{\mathrm{T}} P_x P_1 \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{d}_t^{\mathrm{T}} P_2^{\mathrm{T}} P_x P_2 \boldsymbol{d}_t + 2\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}} P_1^{\mathrm{T}} P_x P_2 \boldsymbol{d}_t \leqslant 1 \tag{11}$$

令 $\widetilde{P}=P_2^{\mathrm{T}}P_xP_2$, $\tilde{\boldsymbol{c}}_1=\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}P_xP_1\boldsymbol{x}_t$, $\tilde{\boldsymbol{c}}_2=2\boldsymbol{x}_t^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}P_xP_2$. 则式(12)可以写成

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_1 + \boldsymbol{d}_t^{\mathrm{T}}\widetilde{P}\boldsymbol{d}_t + \tilde{\boldsymbol{c}}_2\boldsymbol{d}_t \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \widetilde{P} & \widetilde{P}\boldsymbol{d}_t \\ \boldsymbol{d}_t^{\mathrm{T}}\widetilde{P} & 1-\tilde{c}_1-\tilde{c}_2 d_t \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{12}$$

在式(9)和式(12)的约束条件下极小化目标函数 $J=\boldsymbol{d}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}_t$ 得最优辅助变量序列 $\boldsymbol{d}_t^*$. 给出下面的优化问题

$$\min_{\boldsymbol{d}_t} J \qquad \text{s.t. } (9),(12) \tag{13}$$

把最小化问题(13)化成标准的半正定规划问题

$$\min_{\boldsymbol{d}_t} \gamma \qquad \text{s.t. } (9),(12), \begin{bmatrix} \gamma & \boldsymbol{d}_t^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{d}_t & I \end{bmatrix} \geqslant 0 \tag{14}$$

其中 $I\in R^{N\times N}$ 为单位矩阵,式(14)可以用 LMI 方法求解[2].

滚动时域预测控制算法(RHPC)的具体步骤如下

第一步. (离线)设计稳定控制律 $u_t=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_t$, 根据式(8)计算正定矩阵 P_x.

第二步. (在线)求解极小化问题(14)得最优辅助变量序列 $\boldsymbol{d}_t^*$, 并代入式(3)求当前的控制输入.

第三步. (在线)$t=t+1$,返回第二步.

定义一集合 S_x^N, 当系统初始状态 $\boldsymbol{x}_t\in S_x^N$ 时, 半正定规划(14)有解. 注意 S_x^N 就是 RHPC 初始状态允许集,它是由式(9)和(12)决定. 当初始状态 $\boldsymbol{x}_t\in S_x^N$ 时,可以找到一可行的辅助变量序列 $\boldsymbol{d}_t=[d_t,d_{t+1},\cdots,d_{t+N-1}]^{\mathrm{T}}$. 把 $u_{t|t}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_t+\boldsymbol{d}_t$ 作用于系统,则在 $t+1$ 时刻,辅助变量序列 $\boldsymbol{d}_{t+1}=[d_{t+1},d_{t+2},\cdots,d_{t+N-1},0]^{\mathrm{T}}$ 使 $\boldsymbol{x}_{t+N+1|t+1}\in S_x$,因此可以得到 $\boldsymbol{x}_{t+1}\in S_x^N$, 由此递推可知 RHPC 算法在将来任何时刻都可行. 在可行性条件下建立下述稳定性定理.

定理. 对于系统(1),若初始时刻 RHPC 算法可行,则 RHPC 算法始终可行且可以保证系统闭环渐近稳定,并最终收敛到最优控制律.

证明. 由条件知在初始时刻存在一可行的 $\boldsymbol{d}_t=[d_t,d_{t+1},\cdots,d_{t+N-1}]^{\mathrm{T}}$, 满足式(9)和式(12). 若在 $t+1$ 时刻选择 $\boldsymbol{d}_{t+1}=[d_{t+1},d_{t+2},\cdots,d_{t+N-1},0]^{\mathrm{T}}$, 由于最后的元素为 0, 由 S_x 的不变性知 $\boldsymbol{x}_{t+N+1|t+1}\in S_x$, 所以 $\boldsymbol{d}_{t+1}$ 仍是可行解. 这说明若算法在 t 时刻可行, 则在 $t+1$ 时刻也必定可行. 在 $t+1$ 时刻采用 $\boldsymbol{d}_{t+1}$,则所得的目标函数 $J^*(t+1)\leqslant J(t)$, 若在 $t+1$ 时刻进一步优化目标函数 J, 就可以得到更小的目标函数 $J(t+1)\leqslant J^*(t+1)$. 由此递推可得 RHPC 算法使目标函数 J 单调递减 $J(t+1)\leqslant J(t)$, 而且等号只在 $\boldsymbol{d}_t=0$ 时成立. 所以当 t 趋向无穷大时,$\boldsymbol{d}_t$ 趋向于零,由于 $u_t=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_t$ 稳定,所以状态将渐近趋向于零.　　证毕.

3 算法比较

由文献[1]中的控制律求解过程可知,RPC 的控制输入的受限范围单调递减,这就影响了 $\boldsymbol{d}_t$ 的取值范围,从而影响到系统初始状态的允许集. RHPC 采用的是基于闭环状态方程的预测方法,它不要求控制输入的界限满足单调特性,因而不但扩大了初始状态的允许集,而且还能改善控制性能. 下面通过仿真例子来对 RPC 和 RHPC 进行比较.

考虑被控对象(1),其中

$$A = \begin{bmatrix} 2.7899 & -1.8328 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 1.12].$$

被控对象为开环不稳定且非最小相位系统,它的输入受限条件为 $-3 \leqslant u \leqslant 3$. 设计控制器的目的是使系统输出为零. 用文献[3]中不受限系统的稳定广义预测控制算法设计稳定控制律

$$u_t = \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_t = [-2.8811 \quad 1.7794]\boldsymbol{x}_t.$$

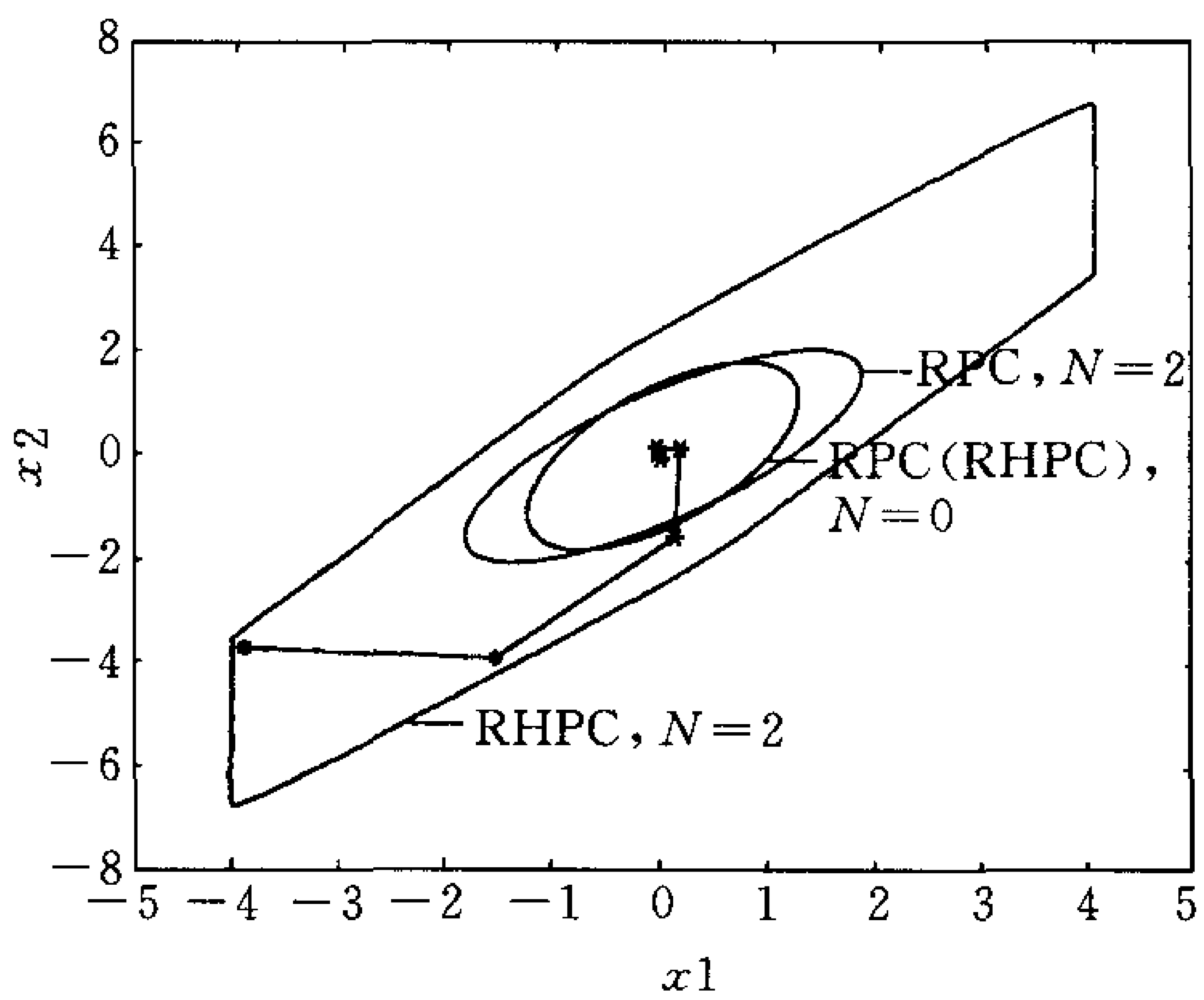

图 1 RPC,RHPC 的初始状态允许集

图 1 所示的是当辅助变量长度 N 为 0 和 2 时采用 RPC 和 RHPC 所对应的被控系统的初始允许集,当 $N=0$ 时 RPC 和 RHPC 没有区别,具有一样的初始允许集. 但当 $N=2$ 时,由图 1 可知采用 RHPC 对应的状态初始允许集要远远大于 RPC. 取初始状态 $\boldsymbol{x}_t = [-3.9 \quad -3.7]$,显然它在 RPC 的初始允许集之外,算法不可行,但采用 RHPC 可以得到很好的控制效果,图 1 中的星号表示不同时刻的系统状态位置,它在第三步就进入 $N=0$ 时的不变集. 系统的输入输出和辅助变量的响应曲线如图 2 所示.

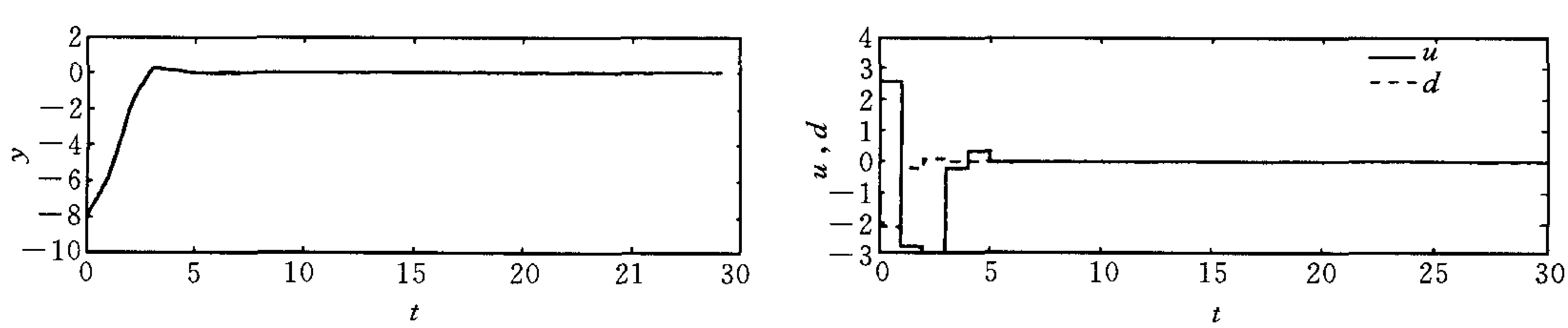

图 2 采用 RHPC 时系统响应曲线

4 结束语

滚动时域预测控制(RHPC)克服了 RPC 辅助变量取值保守的缺点,大大增加了系统状态的初始允许集,而且提高了系统的控制性能. 比较 RPC 算法和 RHPC 算法可知,RHPC 的在线计算量要相对大一些,因为其中半正定规划包含的线性矩阵不等式比 RPC 多.

参考文献

1 Kouvaritakis B, Rossiter J A, Schuurmans J. Efficient robust predictive control. In: Proc. ACC99, 1999, 4283～4287

2 Boyd S, El Ghaiou L, Feron E, Balakrishnan V. Linear matrix inequalities in system and control theory. Philadelphia:SIAM, 1994

3 Rossiter J A, Kouvaritakis B, Rice M J. A numerically robust state-space approach to stable-predictive control strategies. *Automatica*, 1998, **34**(1):65～73

王　伟　1988 年获东北大学工学博士学位，现为大连理工大学教授，博士生导师. 主要研究方向为自适应控制、预测控制、计算机控制及其工业应用.

杨建军　2000 年获东北大学工学博士学位，现在清华大学自动化系从事博士后研究. 主要研究方向为模型预测控制理论及应用.

钱学森学术思想报告会在京举行

中国自动化学会办公室

钱学森教授是我国有杰出贡献的科学家. 曾任中国自动化学会(1961～1980)理事长，现在是中国系统工程学会名誉理事长. 在钱学森教授 90 华诞之际，由中国自动化学会、中国系统工程学会联合举办的"钱学森学术思想报告会"于 2001 年 12 月 3 日在中关村中国科学院数学与系统科学研究院学术报告厅召开.

中央国家机关工委副书记伍绍祖同志，中国自动化学会理事长戴汝为院士，中国系统工程学会常务副理事长于景元教授，中国自动化学会副理事长孙柏林教授出席了报告会. 来自中国科学院、军事科学院、航天工业总公司、总装备部、信息产业部、教育部、新闻媒体等方面的专家、学者、青年科技工作者 100 余人出席了报告会. 戴汝为院长主持了报告会.

会议主题报告人为总装备部涂元季教授，航天工业总公司于景元教授，中国科学院自动化研究所戴汝为院士. 3 位报告人从不同方面回顾和总结了钱学森教授在工程控制论、系统工程以及大成智慧工程等众多学科的科学思想、方法和理论. 钱老早期是以应用力学和工程控制论的研究成果而闻名于世，他对"两弹一星"和国防科学技术的研究与发展所作出的贡献家喻户晓. 自二十世纪八十年代中期以来，他把系统工程发展到大成智慧工程，提出开放的复杂巨系统的概念，是对自然界、人类社会以及人自身普遍存在的复杂事物的科学概括，是集基础研究、高新技术与实际应用于一体的综合性研究的一个科学新领域. 从定性到定量的综合集成方法论、现代科学技术体系、大成智慧等，在自然科学与社会科学的结合、理论与实践的结合、现实与未来发展的结合等方面作出重大贡献. 伍绍祖同志，孙柏林教授也在报告会上发了言.

钱学森教授几十年如一日，在科学技术发展的前沿辛勤耕耘，他的这种科学探索精神，对于我们每个人都是一种激励和鞭策.

祝愿人民科学家钱学森教授健康长寿!