第 15 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 15, No. 3
1989 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1989

输出反馈任置极点的精确解与粗壮性[1)]

王 大 海
(河北省科学院)

摘 要

本文研究 $m+r-1\geqslant n$ 的完全系统. n、r、m 分别是系统的状态、输入、输出变量个数. 以前对任置极点只证明了 ε-近似解的存在性，本文则证明了精确解的存在性，并进而给出了几乎全部精确解集的全部自由参数. 本文指出，利用文[1]的指标，可对这些参数进行两级递阶优选，从而使所配置的闭路特征结构对系统参数中可能出现的各种扰动不敏感，全方位调节特性较优且保持相对稳定.

关键词——线性系统；输出反馈；极点配置；粗壮性.

一、引 言

本文讨论如下系统 $\Sigma(A、B、C)$:

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad y=Cx, \tag{1.1}$$

其中 $A\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$; $B\in \boldsymbol{R}^{n\times r}$; $C\in \boldsymbol{R}^{m\times n}$; 且假定 rank $B=r$; rank $C=m$.

定义 1.1. 对给定的 Λ_n, 若 $\exists K\in \boldsymbol{R}^{r\times m}$ 使得 $\Lambda_n=\sigma(A+BKC)$, 则称 Λ_n 能精确配置. 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K_\varepsilon\in \boldsymbol{R}^{r\times m}$ 使得对 $\forall\lambda\in\Lambda_n$, $\exists\lambda_\varepsilon\in\sigma(A+BK_\varepsilon C)$, 满足 $|\lambda-\lambda_\varepsilon|<\varepsilon$, 则称 Λ_n 能近似配置，称

$$\Lambda_n^\varepsilon:=\{\hat{\lambda}_i;\ \hat{\lambda}_i\in \boldsymbol{C},\ |\lambda_i-\hat{\lambda}_i|<\varepsilon,\ i\in \underline{n}\}$$

是 Λ_n 的一个 ε-近似集.

$\sigma(A)$ 表示 A 的特征值集，Λ_p 表示由 p 个复数组成的共轭对称集.

文献[2—7] 证明了任何 Λ_n 皆能近似配置的充分条件是系统完全且 $m+r-1\geqslant n$.

从实际应用来说，近似解与精确解的效果几乎一样. 但对参数优化而言，ε-近似解集带有许多不确定因素，故有必要解决精确解的存在性，进而给出精确解的参数关系式，才能进行优化. 这些工作详见本文第二节和附录，第三节则以文[1]的结果为指标，研究了优化方法. 本文仅研究 $m+r-1\geqslant n$ 的完全系统.

本文采用了如下符号和术语:

$\underline{m}$: 集合 $\{1,2,\cdots,m\}$;

本文于 1986 年 8 月 22 日收到.
1) 国家自然科学基金资助项目.

$\forall$、$\exists$: 每一个,存在一个;

$\bar{M}$: 复矩阵M的共轭矩阵;

$M|\boldsymbol{F}$: 同态映照 M 在其不变子空间 $\boldsymbol{F}$ 上的限制;

$\langle x, y, \cdots \rangle$: 向量 $x, y, \cdots$张成的子空间;

$\bar{\boldsymbol{F}}$: 子空间 $\boldsymbol{F}$ 的共轭子空间;

$\langle A|I_mB\rangle := I_mB + A(I_mB) + \cdots + A^{n-1}(I_mB)$, 是 (A, B) 能控子空间;

$\boldsymbol{T}$ 是 $(A, B) - c.s.$ (能控性子空间)$\Leftrightarrow \exists F \in \boldsymbol{R}^{r\times n}$, 使 $\boldsymbol{T} = \langle A + BF|\boldsymbol{T} \cap I_mB\rangle$;

$\boldsymbol{T}$ 是 $(A, B) - i.s.$ (不变子空间)$\Leftrightarrow A\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{T} + I_mB$;

$$\boldsymbol{F}(\lambda) := \{f; f \in \boldsymbol{C}^n, (A - \lambda I)f \in I_mB\};$$

$$\boldsymbol{T}(\lambda) := \{t; t \in \boldsymbol{C}^n, (A^\tau - \lambda I)t \in I_mC^\tau\};$$

Λ_n 是 m-可分解的, $\Leftrightarrow \exists \Lambda_m \subset \Lambda_n$.

二、精确解集与粗壮集自由参数

粗壮集自由参数定义如下:

定义 2.1. 以 $\tilde{p} = \{p_1, p_2, \cdots, p_N\} \in \boldsymbol{R}^N$ 为参数变元的有限个多元多项式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 的所有零点的轨迹 $\underline{V} \subset \boldsymbol{R}^N$ 称为流形 (variety), 即:

$$\underline{V} := \{\tilde{p}; \varphi_i(p_1, \cdots, p_N) = 0, i \in \underline{k}\}. \tag{2.1}$$

若 $\underline{V} \neq \boldsymbol{R}^N$, 则称 $\underline{V}$ 为真流形 (proper variety), 其余集 $\underline{V}^c$ 称作粗壮集 (robust set). 若使某性质$\Pi(\tilde{p})$不成立的那些参数 $\tilde{p}$ 皆处于某一真流形 $\underline{V}$ 上,则称Π在$\boldsymbol{R}^N$中几乎处处成立(几乎总是成立,对几乎所有 $\tilde{p}$ 成立). 若这种Π是指某一问题的解,则称 $\tilde{p}$ 中各元为解集 $\Pi(\tilde{p})$ 的粗壮集自由参数.

若赋予 $\boldsymbol{R}^N$ 通常的欧几里德拓扑,则由定义真流形 $\underline{V}$ 的那些多项式的连续性可知, $\underline{V}$ 是$\boldsymbol{R}^N$的一个闭子集 Lebsgue 测度为零,而 $\underline{V}^c$ 是 $\boldsymbol{R}^N$ 的开稠集. 设 $\tilde{p}_0 \in \underline{V}$, 则 $\tilde{p}_0$ 的每个邻域都包含点 $\tilde{p} \in \underline{V}^c$. 因而若性质 $\Pi(\tilde{p})$ 几乎处处成立,但在 $\tilde{p}_0$ 点不成立,则可通过任意小的适当摄动来移动 $\tilde{p}_0$, 使Π成立. 在这种意义上,粗壮集自由参数在参数寻优求解过程中的作用与常规自由参数基本相同,仅增加了检验和必要时的摄动. 不难证明如下命题.

命题 2.2. 在同一 $\boldsymbol{R}^N$ 中,有限个粗壮集的交集仍为粗壮集,以某粗壮集为子集的集亦为粗壮集.

本文主要结果可记述如下:

定理 2.3. 各元互异的任何 m-可分解集 Λ_n 皆能精确配置. 几乎全部精确解 $K \in \boldsymbol{R}^{r\times m}$ 都可用算法 2.4 中的参数表示,其中有 mr 个粗壮集自由参数, $(mr - n)$ 个粗壮集设计自由度.

算法 2.4. (求 $K \in \boldsymbol{R}^{r\times m}$ 使 $\sigma(A + BKC) = \Lambda_n$.)

步 1. 对互导的 Λ_n 作 m-分解: $\Lambda_n = \Lambda_{n-m} \cup \Lambda_m$, 记

$$\Lambda_{n-m} = \{\lambda_i; i \in \underline{n - m}\}, \ \Lambda_m = \{\lambda_j; j = n - m + 1, \cdots, n\}.$$

定义参数矩阵集:

$$\theta:=\{[g_1,\cdots,g_{n-m}];g_i\in \boldsymbol{C}^m,\ \lambda_i=\bar{\lambda}_j\Rightarrow g_i=\bar{g}_j,i,j\in \underline{n-m}\},\tag{2.2}$$

$$\phi:=\{[h_{n-m+1},\cdots,h_n];h_j\in \boldsymbol{C}^{m+r-n},\ \lambda_i=\bar{\lambda}_j\Rightarrow h_i=\bar{h}_j,\ i,j=n-m+1,\cdots,n\}.\tag{2.3}$$

步 2. 求 $\ker[A^\tau-\lambda_i[\ \vdots\ C^\tau]$ 的基矩阵 $\begin{bmatrix}T_i\\N_i\end{bmatrix}\begin{matrix}\}n\\\}m\end{matrix}$，且若 $\lambda_i=\bar{\lambda}_j$，则使 $T_i=\bar{T}_j$, $N_i=\bar{N}_j$, i, $j\in\underline{n-m}$.

步 3. 任选 $[g_1,\cdots,g_{n-m}]\in\theta$，记

$$\begin{bmatrix}T\\N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_1\cdots t_{n-m}\\\eta_1\cdots\eta_{n-m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_1\cdots T_{n-m}\\N_1\cdots N_{n-m}\end{bmatrix}\cdot\operatorname{diag}\{g_1,\cdots,g_{n-m}\}.\tag{2.4}$$

步 4. 检验，若有

$$\operatorname{rank}[T^\tau B]=n-m,\tag{2.5}$$

$$\operatorname{rank}[T\ \vdots\ C^\tau]=n,\tag{2.6}$$

则继续，否则摄动 $[g_1,\cdots,g_{n-m}]\in\theta$ 返步 3.

步 5. 求 $\ker\begin{bmatrix}A-\lambda_jI & B\\T^\tau & 0\end{bmatrix}$ 的基矩阵 $\begin{bmatrix}F_j\\M_j\end{bmatrix}\begin{matrix}\}n\\\}r\end{matrix}$，且若 $\lambda_i=\bar{\lambda}_j$，则使 $F_i=\bar{F}_j$, $M_i=\bar{M}_j$, i, $j=n-m+1,\cdots,n$.

步 6. 检验，若有

$$\operatorname{rank}F_j=m+r-n,j=n-m+1,\cdots,n,\tag{2.7}$$

$$\operatorname{rank}[F_{n-m+1},\cdots,F_n]=m,\tag{2.8}$$

则继续，否则摄动 $[g_1,\cdots,g_{n-m}]\in\theta$，返步 3.

步 7. 任选 $[h_{n-m+1},\cdots,h_n]\in\phi$，计算

$$\begin{bmatrix}F\\M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{n-m+1}\cdots f_n\\\xi_{n-m+1}\cdots\xi_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{n-m+1}\cdots F_n\\M_{n-m+1}\cdots M_n\end{bmatrix}\cdot\operatorname{diag}\{h_{n-m+1},\cdots,h_n\}.\tag{2.9}$$

步 8. 检验，若有

$$\operatorname{rank}F=m,\tag{2.10}$$

则继续，否则摄动 $[h_{n-m+1},\cdots,h_n]\in\phi$，返步 7.

步 9. 计算

$$K=M(CF)^{-1},\tag{2.11}$$

则 K 即所求精确解.

显然，θ、ϕ 分别与 $\boldsymbol{R}^{m\times(n-m)}$、$\boldsymbol{R}^{(m+r-n)\times m}$ 同构. 因 (2.6) 式和步 5、步 8 保证了 (CF) 非奇异，故要证算法2.4的可行性，仅需证明如下命题：

命题 2.5. 使(2.5)—(2.8)式同时成立的那些 $[g_1,\cdots,g_{n-m}]\in\theta$ 所成的集合是 θ 的粗壮集；使(2.10)式成立的那些 $[h_{n-m+1},\cdots,h_n]\in\phi$ 所成的集是 ϕ 的粗壮集. 此命题的详尽证明请见附录. 若命题 2.5 成立，算法 2.4 可行，为证定理 2.3，仅需证明如下命题.

命题 2.6. 算法 2.4 的 K 阵满足

$$\sigma(A+BKC)=\Lambda_n.\tag{2.12}$$

证. 由步 5 知, $t_i^T f_j = 0, i \in \underline{n-m}, j = n-m+1, \cdots, n$.

$$t_i^T B \xi_j = t_i^T(\lambda_j I - A) f_j = t_i^T(\lambda_i I - A) f_j + (\lambda_j - \lambda_i) t_i^T f_j = \eta_i^T C f_j,$$
$$i \in \underline{n-m}, j = n-m+1, \cdots, n. \tag{2.13}$$

故对 $\forall\ \lambda_i \in \Lambda_{n-m}, i \in \underline{n-m}$, 有

$$t_i^T(\lambda_i I - [A + BKC]) = t_i^T(\lambda_i I - A) - t_i^T B[\xi_{n-m+1} \cdots \xi_n](CF)^{-1}C$$
$$= \eta_i^T C - \eta_i^T C[f_{n-m+1} \cdots f_n](CF)^{-1}C = 0,$$

即有 $\Lambda_{n-m} \subset \sigma(A + BKC)$, 而对 $j = n-m+1, \cdots, n$, 有

$$(\lambda_j I - [A + BKC]) f_j = (\lambda_j I - A) f_j - BM(CF)^{-1}C[f_{n-m+1}, \cdots, f_n] e_{j-(n-m)}$$
$$= B\xi_j - B[\xi_{n-m+1}, \cdots, \xi_n] e_{j-(n-m)} = 0,$$

即有 $\Lambda_m \subset \sigma(A + BKC)$. 故 $\Lambda_n = \Lambda_{n-m} \cup \Lambda_m = \sigma(A + BKC)$.

备注 2.7. 尚不能说算法 2.4 给出了全部精确解，因确可能有个别解的参数不满足(2.5)—(2.8)式,但因其皆处于某个真流形上，Lebsgue 测度为零，故可以说几乎全部精确解都可用 θ 和 ϕ 中的粗壮集自由参数表示出来. 这些参数共计 mr 个,因向量 t_i, f_j 的模长不影响解值,故可折合为 $(mr - n)$ 个粗壮集设计自由度.

备注 2.8. 算法 2.4 较文[2—7]提供的算法有如下优点:

(1) 不必对 Λ_n 作任何摄动,不要求 A 为循环阵,对矩阵 K 的秩无特定限制，不必寻找一个部分状态不可控的单输入系统,适用范围大.

(2) 几乎摆脱了一切非线性约束，仅用解线性方程组的方法就给出了几乎全部精确解与参数的关系,方法简便可靠,为进一步参数优化创造了良好的条件.

备注 2.9. 算法 2.4 稍加改动,即可使一切计算都在实数域进行.

推论 2.10. 任何互异的 Λ_n 皆能精确配置.

三、参数优化与数据实例

由于辨识误差、计算误差、元器件制造误差和老化、以及外界干扰等难以避免，系统 $\Sigma(A,B,C)$ 的参数 A、B、C、K 都不可能很精确,有一些随机性的误差或称作扰动. 极点配置的目的是改善闭路动态特性，当然希望所配置的闭路极点对系统参数的扰动不敏感,具有较好的粗壮性.

文[1]中已说明了: 指标

$$J = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} s_i^{-1} \tag{3.1}$$

作为优化指标使其最小,可以使闭路系统的全方位调节性能、极点的粗壮性，以及特征向量间的正交化程度都得到改善. 这里 $s_i = |t_i^T f_i| / \|t_i\|_2 \|f_i\|_2$, t_i、f_i 分别是 $(A + BKC)$ 的左、右特征向量，$i \in \underline{n}$, 故研究输出反馈极点配置的参数优化问题亦可以 J 为指标.

这里选用了二级递阶单纯形优化方法. 这是因为基矩阵

$$\begin{bmatrix} F_j \\ M_j \end{bmatrix} \quad (j = n-m+1, \cdots, n)$$

的确定皆要依赖于 $[g_1,\cdots,g_{n-m}]\in\theta$ 的每次选取，因而优选 $[h_{n-m+1},\cdots,h_n]$ 的工作只能对每个固定的 $[g_1,\cdots,g_{n-m}]$ 进行．也还因为难以写出指标 J 对各参数的梯度表达式来．

例 3.1． $n=4, r=2, m=3$,

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \Lambda_n=\{-1,-0.5,-3,-4\}.$$

解：作 m-分解：$\Lambda_{n-m}=\{-1\}$，$\Lambda_m=\{-0.5,-3,-4\}$，则

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ \cdots \\ N_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

若取 $g_1=[1\quad 1\quad 0]^\tau$，则 $J=58.729$，$K=\begin{bmatrix} -7 & 54 & -12 \\ -3.5 & 26.5 & -6 \end{bmatrix}$．优化后可得

$$J=23\,727,\qquad K=\begin{bmatrix} -26.79841 & 20.2054 & 0.4257 \\ -9.3442 & 6.7016 & -0.1558 \end{bmatrix}.$$

若对 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-0.5$ 固定，允许对 λ_3、λ_4 优选，在要求 $\lambda_i<-2$ 的条件下，$i=3, 4$，可得 $J=4.112$，$\lambda_3=-2.216$，$\lambda_4=-144.68$，

$$K=\begin{bmatrix} -550.4251 & 459.3631 & 67.5085 \\ -169.8359 & 141.4425 & 20.4376 \end{bmatrix}.$$

这是一个可摄动的三级递阶单纯形搜索优化问题．此例说明此方法对优选极点集 Λ_n 亦是极为有效的．

作者感谢高为炳教授、涂序彦教授、程勉教授的热情关注，感谢霍伟老师的热情帮助．

附录　命题 2.5 的证明

此证明最后将由命题 $A10$ 完成，在此之前需作许多准备工作，一个重要的概念是 $\boldsymbol{E}$-正则集．

定义 $A1$．对子空间 $\boldsymbol{E}\subset\boldsymbol{C}^n$，称 $\boldsymbol{C}^n$ 中一组子空间 $\{\boldsymbol{L}_1,\cdots,\boldsymbol{L}_s\}$ 为 $\boldsymbol{E}$-正则集（$\boldsymbol{E}$-normal set），是说对任一整数 $t\leqslant s$，任选 t 个子空间 $\boldsymbol{L}_{ij}\in\{\boldsymbol{L}_1,\cdots,\boldsymbol{L}_s\}, j\in t$，都能满足如下不等式：

$$d\left(\boldsymbol{E}+\sum_{j=1}^{t}\boldsymbol{L}_{ij}\right)\geqslant d\boldsymbol{E}+t. \tag{A1}$$

性质 $A2$．子空间集 $\{\boldsymbol{L}_1,\cdots,\boldsymbol{L}_s\}$ 为 $\boldsymbol{E}$-正则集的充分必要条件是，可选向量 $l_i\in\boldsymbol{L}_i, i\in s$，使

$$d(E + \langle l_1, \cdots, l_s \rangle) = dE + s, \tag{A2}$$

且若 $L_i = \bar{L}_j$, 则可选得 $l_i = \bar{l}_j$.

引理 A3. 见文[6].

对一切正整数 t, 若 $\forall \lambda_i \in C$, $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i, j \in \underline{t}$, 则有:

$$d\left(\sum_{i=1}^{t} T(\lambda_i)\right) = d\left(\sum_{i=1}^{t} A^{\tau i-1}(I_m C^{\tau})\right). \tag{A3}$$

由此可推得如下命题:

命题 A4. 若 $\sum_{i=1}^{t} T(\lambda_i) \neq C^n$, 则

$$I_m C^{\tau} \cap \sum_{i=1}^{t} T(\lambda_i) \neq I_m C^{\tau}. \tag{A4}$$

命题 A5. 若 $t \leqslant n - m$, 则任意 t 个互异复数 $\lambda_i, i \in \underline{t}$, 对应的 $\{T(\lambda_i), i \in \underline{t}\}$ 都是 $I_m C^{\tau}$-正则集.

推论 A6. 若 $dE = s \leqslant m - 1$, 则任意 $t \leqslant n - s$ 个互异复数 λ_i, $i \in \underline{t}$ 所对应的 $\{T(\lambda_i), i \in \underline{t}\}$ 都是 E-正则集.

命题 A7. 使(2.5)、(2.6)式同时成立的那些 $[g_1, \cdots, g_{n-m}] \in \theta$ 构成 θ 的粗壮集,记作 θ_1.

命题 A8. 见文[9].

$\ker [A - \lambda I \vdots B]$ 有一组基 $\left\{\begin{bmatrix} x_i(\lambda) \\ u_i(\lambda) \end{bmatrix}, i \in \underline{r}\right\}$ 具有如下形式:

$$x_i(\lambda) = x_{i,0} + \lambda x_{i,1} + \cdots + \lambda^{v_i - 1} x_{i, v_i - 1}, \tag{A5}$$

$$u_i(\lambda) = u_{i,0} + \lambda u_{i,1} + \cdots + \lambda^{v_i} u_{i, v_i}, \tag{A6}$$

而 E 是一个 (A, B)-$c.s.$ 的充分必要条件是: 若 $dE = d$, 则 ∃ 多项式向量 $z(\lambda)$, 使得

$$z(\lambda) = z_0 + \lambda z_1 + \cdots + \lambda^{d-1} z_{d-1} = \sum_{i: v_i \leqslant d} x_i(\lambda) a_i(\lambda), \tag{A7}$$

$$E = \langle z_0, z_1, \cdots, z_{d-1} \rangle, \tag{A8}$$

命题 A9. 对 $\forall \mu \in C$, 都能有:

$$I_m T \cap F^{\perp}(\mu) = \{0\} \tag{A11}$$

的那些 $[g_1, \cdots, g_{n-m}] \in \theta$ 所成集 θ_3 是个粗壮集.

命题 A10. 若 $[g_1, \cdots, g_{n-m}] \in \theta_1$, $T = \langle t_1, \cdots, t_{n-m} \rangle$, t_i 由步 3 所定义, $i \in \underline{n-m}$, 则 $\exists K_1 \in R^{r \times m}$, 使 $\Lambda_{n-m} \subset \sigma(A + BK_1C)$, $(A + BK_1C)^{\tau} T \subset T$, 且下列诸款彼此等价.

(1) $T^{\perp} = \langle A + BK_1C | T^{\perp} \cap I_m B \rangle$,

(2) $\forall \lambda \in \sigma(A + BK_1C | T^{\perp})$, $T \cap F^{\perp}(\lambda) = \{0\}$;

(3) $\forall \lambda \in C, T \cap F^{\perp}(\lambda) = \{0\}$;

(4) (2.7)式和(2.8)式同时成立;

(5) $[g_1, \cdots, g_{n-m}] \in \theta_3$.

当(1)—(5)之一成立时,命题 2.5 成立.

参 考 文 献

[1] 王大海、王俊杰、解新建、周淑均、杜凡远, 粗壮特征结构最优调节器设计, 1987 年全国控制理论及其应用年会论文集.

[2] Davison, E. J. and Wang, S. H., On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback, *IEEE Trans.* **AC-20** (1975), 516—518.
[3] Kimura, H., Pole Assignment by Gain Output Feedback, *IEEE Trans.* **AC-20**(1975), 509—516.
[4] Topaloglu, J., and Seborg, D.E., A Design Procedure for Pole Assignment Using Output Feedback, *Int.J. Control*, **22**(1975), 741—749.
[5] 张正方、成邦文，输出反馈极点配置的一种新方法，自动化学报，**9**(1983)，No. 4, 296—305.
[6] 郑毓蕃、韩正之，线性控制系统中的（A, B）特征子空间（I）—(A,B）特征子空间的基本性质及其构造，控制理论与应用，**1**(1984)，No. 3,90—100.
[7] 郑毓蕃、韩正之，线性控制系统中的（A, B）特征子空间（II）—在输出反馈研究中的应用，控制理论与应用，**2**(1985)，No. 1,53—60.
[8] Kimura, H., On Pole Assignment by Output Feedback, *Int. J. Control*, **28**(1978),1, 11—22.
[9] Warren, M.E. and Eckberg, A. E., On the Dimensions of Controllability Subspaces: A Characterization Via Polynomial Matrices and Kronecker Invariants, *SIAM.J.Control*, **13**(1975), 434—445.

THE EXACT SOLUTION AND OPTIMAL ROBUSTNESS OF ARBITRARY POLE ASSIGNMENT BY OUTPUT FEEDBACK

WANG DAHAI
(Hebei Academy of Sciences)

ABSTRACT

This paper proves that there exists an exact solution for $m+r-1\geqslant n$ complete systems to arbitrarily assign all poles by output feedback. In addition, it gives all the free parameters of almost all exact solutions and makes use of the criteria given in [1] to optimize these parameters, which makes the closed-loop eigenstructure assigned have optimal robustness.

Key words ——linear system; output feedback; pole assignment; robustness.