第 33 卷 第 8 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 8
2007 年 8 月 ACTA AUTOMATICA SINICA August, 2007

双线性系统多目标控制问题研究

钱富才 [1] 高振斌 [1] 刘 丁 [1]

摘 要 研究了双线性系统的多目标控制问题. 首先把多目标控制问题, 通过效用函数技术转化为一个单目标最优控制问题, 其中, 效用函数是多个二次型性能指标的非线性函数, 因此, 在动态规划的意义下是不可分的. 然后, 为了克服不可分对求解带来的困难, 提出了一种两级最优控制算法. 下级用动态规划求解一个参数化的具有双线性 — 二次型结构的辅助 Lagrangian 问题; 上级迭代调整辅助 Lagrangian 问题中的参数向量. 不断重复这个过程, 直至最优性条件被满足.

关键词 最优控制, 双线性系统, 多级优化, 动态规划

中图分类号 TP13

Multi-objective Control Problem of Bilinear Systems

QIAN Fu-Cai[1] GAO Zhen-Bin[1] LIU Ding[1]

Abstract The control problem of bilinear systems with multiple objectives is studied. First, the multi-objective control problem is converted into a single objective optimal control problem using the utility function technology. The utility function is a nonlinear function of multiple quadratic performance indices, and therefore it is non-separable in the sense of dynamic programming. Then, to overcome this difficulty, a two-level optimal control algorithm is proposed. At the lower level, the formulated auxiliary Lagrangian problem is of a parametric bilinear-quadratic structure and it is solved by dynamic programming. Finally, the weighting vector in the auxiliary Lagrangian problem is adjusted by the upper level iteratively. This two-level process repeats until an optimal condition is satisfied.

Key words Optimal control, bilinear system, multi-level optimization, dynamic programming

1 引言

线性二次最优控制问题以工程上的实用性和数学上的易处理性, 在最优控制理论中一直占有主导地位. 然而, 在大量的实际问题中, 系统往往是非线性的. 尽管非线性系统能够深刻反映丰富多彩的自然现象和动态信息, 然而就目前的科学现状和人类的认识水平, 还没有一种令人满意、行之有效、能够对付任何非线性系统的最优控制方法. 众所周知, 双线性系统是形式上最简单, 介与线性与非线性之间, 并且最接近于线性系统的一类非线性系统. 它不仅可以自然地描述诸如工业过程中的许多对象, 还能够在稳态工作点的一个较大领域内描述一大类严重非线性系统的动态特性, 由于双线性项的存在, 使得描述精度优于传统的近似线性模型[1].

当系统为双线性、目标函数为二次型单目标时, 文献 [2] 提出的迭代逼近算法是求解双线性系统最优控制的一个优秀算法, 本文之所以仅考虑双线性系统的最优控制问题, 就是因为对双线性系统存在文献 [2] 这样的算法, 而对于一般的非线性系统没有类似的算法.

在多数情况下, 系统的性能应该是多方面的, 而不是单方面的. 事实上, 几乎没有系统能够通过一个性能指标对控制作出合理、恰当的判断. 因为, 系统在运行过程中, 可能是连续的, 也可能是离散的; 可能是线性的, 也可能是非线性的; 可能是确定性的, 也可能是随机的. 对于如此复杂的问题, 用一个目标设计出的控制器, 很难保证闭环系统的响应满足期望的要求. 这样, 控制设计者不得不考虑多目标的最优控制问题.

多目标最优控制问题的本质就是求其非劣解, 但是, 对于向量函数我们无法像数那样比较谁优谁劣, 然后给出一个简单的序. 最常用的方法就是用具有物理意义的效用函数, 把多目标优化问题转化为单目标优化问题, 然后求解, 就可得到原问题的一个非劣解. 在本文讨论的问题中, 这一简单思想实现的困难是效用函数在动态规划的意义下是不可分的, 即效用函数不能表示成各个目标的线性加权和. 对于随机系统, 当方差作为目标函数时, 效用函数是不可分的, 文献 [3 ∼ 8] 进行了深入讨论.

本文首先把多目标控制问题, 通过效用函数技术转化为一个单目标最优控制问题. 这样产生了在动态意义下的不可分优化问题, 然后, 把

收稿日期 2006-3-28 收修改稿日期 2006-6-27
Received March 28, 2006; in revised form June 27, 2006
高等学校博士学科点专项科研基金 (20060700007), 陕西省自然科学基金 (2005F15) 资助
Supported by Specialized Research Fund for Doctoral Program of Higher Education (2006070007), Natural Science Foundation of Shaanxi Province of China (2005F15)
1. 西安理工大学自动化与信息工程学院 西安 710048
1. School of Automation and Information Engineering, Xi′an University of Technology, Xi′an 710048
DOI: 10.1360/aas-007-0847

不可分问题, 嵌入到一个多目标最优控制问题中, 证明了原问题的最优解在多目标问题的非劣解集中, 提出了从非劣解集中挑出原问题的最优解的两级算法, 建立了算法的理论基础.

2 双线性系统的多目标最优控制问题

考虑以下离散双线性动态系统

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(k+1) &= A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)+\{\boldsymbol{x}(k)H\}\boldsymbol{u}(k)\\ \boldsymbol{x}(0)&=\boldsymbol{x}_0\end{aligned}\tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 是系统的状态向量, $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$ 是控制向量, $\boldsymbol{x}_0$ 为给定的初始状态, A 和 B 分别为 $n\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵, $\{\boldsymbol{x}(k)H\}\boldsymbol{u}(k)$ 是一个形式记号, 表示系统的双线性项, 具体表达式为

$$\{\boldsymbol{x}(k)H\}\boldsymbol{u}(k)=\sum_{i=1}^{m}H_i\boldsymbol{x}(k)u_i(k)$$

性能指标为

$$\begin{aligned}J_i &= \sum_{k=0}^{N-1}\left[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(k)Q_i(k)\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(k)R_i(k)\boldsymbol{u}(k)\right]+\\ &\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(N)Q_i(N)\boldsymbol{x}(N)\end{aligned}$$

其中, $J_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为系统的 s 个不同的目标函数, 它们从不同的层面度量了同一系统的多个性能, $\{Q_i(k)\}$ 为半正定矩阵序列, $\{R_i(k)\}$ 为正定矩阵序列. 注意, 同一系统的多个性能往往是冲突的, 或者不能用一个标准统一度量. 这样, 为使双线性系统 (1) 以最优的方式运行, 需要考虑系统的多目标最优控制问题. 进一步, 为使问题简化, 本文通过效用函数技术, 将多目标控制问题转化为单目标控制问题, 为此, 考虑系统的效用函数 $\phi(J_1,J_2,\cdots,J_s)$, 其中 ϕ 是连续可微函数, 且满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial J_i}>0,\quad i=1,2,\cdots,s\tag{2}$$

条件 (2) 表明：每个性能指标的改进, 必然导致效用函数也就是整体性能指标的改进. 因此, 考虑如下最优控制问题

$$\begin{aligned}\mathrm{P}:\quad &\min_{\boldsymbol{u}}\phi(J_1,J_2,\cdots,J_s)\\ \text{s.t. }&\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)+\{\boldsymbol{x}(k)H\}\boldsymbol{u}(k)\\ &\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{aligned}$$

当整体目标 ϕ 为线性函数时, 如, $\phi=w_1J_1+w_2J_2+\cdots+w_sJ_s$, 称问题 P 是可分的；当整体目标为非线性函数时, 如, $\phi=J_1^2+J_2\cdots J_s$, 称问题 P 是不可分的. 前者已经有成熟的算法[2], 而后者是一个新问题. 本文的主要工作在于给出后者的求解算法, 并建立了相应的理论基础.

3 多目标优化问题

问题 P 在动态规划的意义下是不可分的, 无法直接求解, 因此, 对于问题 P, 构造如下多目标优化问题 MOP

$$\begin{aligned}\mathrm{MOP}:\quad &\min_{\boldsymbol{u}}[J_1,J_2,\cdots,J_s]^{\mathrm{T}}\\ \text{s.t. }&\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)+\{\boldsymbol{x}(k)H\}\boldsymbol{u}(k)\\ &\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{aligned}$$

求解问题 MOP 的实质就是求其非劣解集.

定义. 设 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 为 MOP 的一个可行解, 如果不存在其他可行解 $\boldsymbol{u}$, 使得

$$J_i(\boldsymbol{u})\le J_i(\hat{\boldsymbol{u}}),\ \ i=1,2,\cdots,s$$

其中至少有一个不等式严格成立, 则称 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 为 MOP 的非劣解.

定理 1. 问题 P 的最优解一定是问题 MOP 的非劣解.

证明. 用反证法. 设 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 为 P 的最优解, 但不是 MOP 的非劣解, 则, 根据非劣解的定义, 一定存在一个异于 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 的允许控制 $\bar{\boldsymbol{u}}$, 使得

$$J_i(\bar{\boldsymbol{u}})\le J_i(\hat{\boldsymbol{u}}),\quad i=1,2,\cdots,s$$

其中至少有一个不等式严格成立. 根据函数 ϕ 的单调性, 即条件 (2), 有

$$\phi(J_1,J_2,\cdots,J_s)\mid_{\bar{\boldsymbol{u}}}<\phi(J_1,J_2,\cdots,J_s)\mid_{\hat{\boldsymbol{u}}}$$

上式与 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 为 P 的最优解矛盾, 故定理得证. □

该定理表明: 问题 P 的最优解在问题 MOP 的非劣解集中, 因此, 解决问题 P 的策略为, 先求出问题 MOP 的非劣解集, 然后, 再从非劣解集中挑出 P 的最优解. 显然, 问题 MOP 在 R_+^n 中是凸的, 这样, MOP 的每个非劣解可用下面的辅助 Lagrangian 问题 ALP 获得[8]

$$\begin{aligned}\mathrm{ALP}:\quad &\min_{\boldsymbol{u}}\sum_{i=1}^{s}w_iJ_i\\ \text{s.t. }&\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)+\{\boldsymbol{x}(k)H\}\boldsymbol{u}(k)\\ &\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{aligned}$$

对于给定的权系数, 问题 ALP 是一个由 $\boldsymbol{w}=[1,w_1,\cdots,w_s]^{\mathrm{T}}$ 参数化的具有双线性 — 二次型结构的最优控制问题, 其突出特点是在动态规划意义下是可分的, 由文献 [2] 知, 求解 ALP 的算法为

算法 1.

步骤 1. 给定权系数 $\boldsymbol{w}$, 置当前的迭代次数为 $m=1$.

步骤 2. 假定第 m 次迭代, ALP 的最优解为 $\{\boldsymbol{x}^m(k)\}$, 当 $m=1$ 时, $\boldsymbol{x}^m(k)=\boldsymbol{x}_0$.

步骤 3. 在动态系统 (1) 的双线性项 $\{\boldsymbol{x}(k)H\}\boldsymbol{u}(k)$ 内, 令 $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{x}^m(k)$, 这样 ALP 是一个线性二次最优控制问题 LQ.

步骤 4. 用动态规划求解最优控制问题 LQ, 得最优解 $\{\boldsymbol{x}^*(k),\boldsymbol{u}^*(k)\}$.

步骤 5. 判断当前解与前一次解的欧氏距离是否小于事先给定的 ε, 如果是, 结束, 当前解为最优解; 否则, 继续.

步骤 6. 令 $m=:m+1$, $\boldsymbol{x}^m(k)=\boldsymbol{x}^*(k)$, 回步骤 2.

4 最优性条件

由定理 1 知, P 的最优解在 MOP 的非劣解集中, 不同的权系数对应不同的非劣解, 那么究竟哪个权系数对应的非劣解是 P 的最优解呢? 下面的最优性条件回答了这个问题.

定理 2. 设 $\{\boldsymbol{u}^*(k)\}$ 为 P 的最优解, 假定 MOP 的解集中与 $\boldsymbol{w}^*$ 所对应的非劣解为 P 的最优解, 则

$$\frac{\partial\phi}{\partial J_1}\mid_{\boldsymbol{w}^*}=\frac{1}{w_2^*}\frac{\partial\phi}{\partial J_2}\mid_{\boldsymbol{w}^*}=\cdots=\frac{1}{w_s^*}\frac{\partial\phi}{\partial J_s}\mid_{\boldsymbol{w}^*} \tag{3}$$

证明. 对于给定的权系数 $\boldsymbol{w}$, 假定由 ALP 产生 MOP 的非劣解 $\{\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})\}$ 为 P 的最优解, 把其代入系统方程和性能指标 J_i, 则每个 J_i 也为 $\boldsymbol{w}$ 的函数, 从而, $J=\phi(J_1,J_2,\cdots,J_s)$ 也是 $\boldsymbol{w}$ 的函数. 设 J 在 $\boldsymbol{w}^*$ 达到最优, 根据一阶最优性的必要条件 $\dfrac{\mathrm{d}J(\boldsymbol{w}^*)}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}=0$, 因此, 有

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial J_1}\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}+\frac{\partial\phi}{\partial J_2}\frac{\mathrm{d}J_2}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}+\cdots+\frac{\partial\phi}{\partial J_s}\frac{\mathrm{d}J_s}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}\right]\mid_{\boldsymbol{w}^*}=0 \tag{4}$$

又因为 $\boldsymbol{w}^*$ 对应的解为 ALP 的最优解, 根据文献 [9] 有

$$\left[\frac{\mathrm{d}J_1}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}+w_2^*\frac{\mathrm{d}J_2}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}+\cdots+w_s^*\frac{\mathrm{d}J_s}{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}\right]\mid_{\boldsymbol{w}^*}=0 \tag{5}$$

联合式 (4) 和 (5), 可得最优性条件 (3). □

5 参数 $\boldsymbol{w}$ 的校正公式

一般情况下, 不可能求出 (3) 的解析解. 本文用搜索方法获得了最优的权系数 $\boldsymbol{w}^*$, 以下方法与文献 [10] 类同. 设 $J=\phi(J_1,J_2,\cdots,J_s)$, 则 J 的梯度记为 $\bigtriangledown J$. 定义

$$\begin{aligned}V(\boldsymbol{w}) &= [V_1(\boldsymbol{w}),V_2(\boldsymbol{w}),\cdots,V_s(\boldsymbol{w})]^{\mathrm{T}}\\ &= -\bigtriangledown J+\frac{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\bigtriangledown J}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}}\boldsymbol{w}\end{aligned} \tag{6}$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\bigtriangledown^{\mathrm{T}}J\bullet V(\boldsymbol{w})=-\|\bigtriangledown J\|^2+\frac{(\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\bigtriangledown J)^2}{\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}}\le 0$$

这表明 $V(\boldsymbol{w})$ 是 J 的一个下降方向. 当 $V(\boldsymbol{w})=0$ 时, 根据 (6) 容易验证最优性条件 (3) 成立. 因此 $V(\boldsymbol{w})=0$ 与最优性条件是等价的. 设第 m 次迭代所用的 $\boldsymbol{w}$ 为 $\boldsymbol{w}^m$, MOP 的解为 $\{\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w}^m)\}$. 构造以下问题

$$\begin{aligned}&\min J_1\\ \text{s.t.}\ &J_i(\boldsymbol{u})\le J_i(\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{w})+\alpha V_i(\boldsymbol{w}^m)\\ &\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)+\{\boldsymbol{x}(k)H\}\boldsymbol{u}(k)\end{aligned} \tag{7}$$

问题 (7) 的 Lagrangian 问题为

$$\begin{aligned}&\min L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})\\ \text{s.t.}\ &\boldsymbol{x}(k+1)=A\boldsymbol{x}(k)+B\boldsymbol{u}(k)+\{\boldsymbol{x}(k)H\}\boldsymbol{u}(k)\end{aligned} \tag{8}$$

其中,

$$L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})=J_1+\sum_{i=2}^{s}\lambda_i\left[J_i(\boldsymbol{u})-J_i(\hat{\boldsymbol{u}})-\alpha V_i(\boldsymbol{w}^m)\right]$$

$\boldsymbol{\lambda}=[1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s]^{\mathrm{T}}$ 为 Lagrangian 乘子. (7) 的对偶问题为

$$D(\boldsymbol{\lambda})=\min_{\boldsymbol{u}}L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})$$

约束为系统的动态方程. 根据原始对偶理论, 问题 (7) 的解与

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}}\min_{\boldsymbol{u}}L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda})=\max_{\boldsymbol{\lambda}}D(\boldsymbol{\lambda})$$

等价. 如果采用梯度法搜索对偶函数 $D(\boldsymbol{\lambda})$ 的最大值, 则

$$\boldsymbol{\lambda}^{m+1}=\boldsymbol{\lambda}^m+\frac{\partial D(\boldsymbol{\lambda}^m)}{\partial\boldsymbol{\lambda}}$$

注意到 $\dfrac{\partial D(\hat{\boldsymbol{u}})}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=-\alpha V(\boldsymbol{w}^m)$, 则

$$\boldsymbol{\lambda}^{m+1}=\boldsymbol{\lambda}^m-\alpha V(\boldsymbol{w}^m)$$

由于在 $D(\boldsymbol{\lambda})$ 的最大值处, $\dfrac{\partial D(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=0$, 因此, $V(\boldsymbol{w}^m)=0$, 满足最优性条件 (3). 另外, 这里的 $\boldsymbol{\lambda}$ 与问题 ALP 中的 $\boldsymbol{w}$ 的作用完全相同, 这样 $m+1$ 次的 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$ 有相同的值, 因此, 对下一次 $\boldsymbol{w}$ 的校正有如下定理:

定理 3. 设 $\boldsymbol{w}$ 在第 m 次的值为 $\boldsymbol{w}^m$, 则 $m+1$ 次的值 $\boldsymbol{w}^{m+1}$ 可由下式获得

$$\boldsymbol{w}^{m+1}=\boldsymbol{w}^m-\alpha V(\boldsymbol{w}^m) \tag{9}$$

其中, α 为步长参数.

综上, 解决问题 P 的算法如下:

算法 2.

步骤 1. 对于给定的 $\boldsymbol{w}$, 用算法 1 求解辅助 Lagrangian 问题 ALP.

步骤 2. 判断最优性条件 (3) 是否满足, 若满足, 停止; 否则, 用 (9) 校正 ALP 中的 $\boldsymbol{w}$, 回 Step 1.

$\boldsymbol{w}$ 每校正一次, 问题 ALP 被求解一次, 即产生了 MOP 的一个非劣解, 当最优性条件 (3) 满足时, 表明已经从 MOP 的非劣解集中挑出了原问题的最优解.

6 仿真实例

例 1. 双线性系统为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k)+Bu(k)+Hx(k)u(k)\\ x_0=2,&\quad k=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

性能指标为

$$J=Qx^2(N)+\sum_{k=0}^{N-1}\left[Qx^2(k)+Ru^2(k)\right]$$

其中, $A=0.8$, $B=0.5$, $H=0.2$, $Q=R=1$, $N=10$.

本例用来说明如何用算法 1 求解单性能指标的双线性系统的最优控制问题. 首先, 处理双线性项 $x(k)u(k)$, 把 $x(k)$ 固定在初始状态 x_0, 即 $x(k)=x_0$, 则原来的动态系统变为 $x(k+1)=Ax(k)+z(k)u(k)$, 其中, $z(k)=B+Hx_0$. 显然, 现在的系统已经转化为线性系统, 且性能指标为二次型, 因此可用动态规划求解, 其最优控制为

$$u^*(k)=-\Gamma(k)x(k) \tag{10}$$

其中,

$$\begin{aligned}\Gamma(k) &= D^{-1}(k)AS(k+1)z(k)\\ D(k) &= S(k+1)z^2(k)+R\\ S(k) &= A^2S(k+1)-D(k)\Gamma^2(k)+Q\\ &\quad k=N-1,N-2,\cdots,0\end{aligned}$$

边界条件为: $S(N)=Q$.

把最优控制 (10) 代入原来的双线性系统, 可得最优解 $\{u^*(k),x^*(k)\}$. 用同样的方法再把双线性项 $x(k)u(k)$ 中的状态 $x(k)$ 固定在最优解处, 即令 $x(k)=x^*(k)$, 则双线性系统变为线性系统, 因此用动态规划可以求出如 (10) 的最优控制. 不断的重复这样的过程, 可以求出双线性系统在二次性能指标下的最优控制. 迭代过程中系统状态变化如表 1.

从表 1 可以看出: 随着迭代次数的增加, 系统状态收敛于最优解, 即表 1 中的最后一行. 就本例而言, 收敛速度很快, 在 4 次迭代后, 获得了问题 P 的最优控制与最优轨道.

例 2. 本例考虑的双线性系统与例 1 相同, 性能指标为

$$J_i=Q_ix^2(N)+\sum_{k=0}^{N-1}\left[Q_ix^2(k)+R_iu^2(k)\right],\ i=1,2$$

假定 J_1 与例 1 中的性能指标 J 相同, J_2 中的权矩阵取为 $Q_2=2$, $R_2=0.5$, 效用函数为

$$\phi(J_1,J_2)=J_1+J_1^2J_2$$

下面说明如何用算法 2 求解该不可分双线性系统的最优控制问题. 首先上级给出权系数 w 的值 w^m, 下级用算法 1 对 ALP 求解, 在本例中, ALP 为

$$\min(J_1+w^mJ_2)$$

表 1 状态 $x(k)$ 随迭代次数 m 的收敛情况

Table 1 Convergence case of state $x(k)$ as iteration number m

迭代次数 m	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	$x(5)$	$x(6)$	$x(7)$	$x(8)$	$x(9)$
0	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
1	2.000	0.743	0.365	0.193	0.105	0.058	0.032	0.018	0.010	0.006
2	2.000	0.688	0.324	0.166	0.088	0.048	0.026	0.014	0.008	0.005
3	2.000	0.685	0.323	0.166	0.088	0.048	0.026	0.014	0.008	0.005
4	2.000	0.685	0.323	0.166	0.088	0.048	0.026	0.014	0.008	0.005

假定所得的解为 $\{x^*(k), u^*(k)\}$, 如果其满足最优性条件 (3), 则, 该解为原问题的最优解, 结束；否则, 上级根据 (6) 计算出 $V(w^m)$, 用 (9) 给出下次 w 的值 w^{m+1}. 下级得到 ALP 的权系数后, 重新求解 ALP. 这样, 通过上下两级不断的信息交换, 最终在某 m 次迭代后, $\|V(w^m)\| \leq \varepsilon$, 即满足了最优性条件 (3).

用本文提出的算法 2, w 的初值取为 0, 校正公式为 (9), 步长 α 为 0.01, 经过 4 次迭代校正, 误差小于 0.001, 最优性能指标为 332.853, 最优权系数 $w^* = 0.304$. 仿真表明, 计算过程数值稳定, 收敛速度快. 另外, 由式 (9) 可以看出, w 的校正是沿着效用函数下降的方向, 因此, 每校正一次, 目标函数较前次都有所改进. 误差与迭代次数的仿真结果如表 2 所示.

表 2 最优性条件随迭代次数 m 的收敛情况

Table 2 Convergence case of optimality as iteration number m

迭代次数 m	误差
1	33.722
2	3.310
3	0.046
4	0.0003

7 结论

多目标控制的数学模型, 比单目标控制的数学模型更接近于实际问题. 本文解决了目标函数具有不可分形式的双线性系统的最优控制问题, 提出了一种新算法并建立了相应的理论基础. 该算法实际上为两级算法, 对于上级给定的 $\boldsymbol{w}$, 下级用算法 1 求解一个双线性二次最优控制问题并把结果送给上级；上级用式 (9) 对 $\boldsymbol{w}$ 进行更新, 这样通过上、下级不断的信息交换最终可得到问题的最优解.

References

1 Hua Xiang-Ming. *Bilinear Systems Modeling and Control*. Shanghai: College of Chemical Engineering of East China Press, 1990
(华向明. 双线性系统建模与控制. 上海: 华东化工学院出版社, 1990)

2 Aganovic Z, Gajic Z. The successive approximation procedure for finite-time optimal control of bilinear system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **42**(8): 1932～1935

3 Li D, Qian F C, Fu P L. Variance minimization approach for a class of dual control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(12): 2010～2020

4 Fu P L, Li D, Qian F C. Optimal normal dual control for discrete-time LQG problem with unknown parameters. In: Proceedings of the Society of Instrument and Control Engineers (SICE) Annual Conference. Fukul, Japan, 2003. 2147～2150

5 Li D, Qian F C. Closed-loop optimal control law for discrete time LQG problems with a mean-variance objective. In: Proceedings of 43rd IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2004. 2291～2296

6 Li D, Qian F C, Fu P L. Research on dual control. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(1): 32～42

7 Qian Fu-Cai, Song Li, Chen Xiao-Ke. Dual control strategy based on receding horizon. *Control Theory & Applications*, 2005, **22**(6): 855～860
(钱富才, 宋俐, 陈小可. 基于滚动优化的对偶控制策略. 控制理论与应用, 2005, **22**(6): 855～860)

8 Qian Fu-Cai, Liu Ding, Li Yun-Xia. Dual control based on two-level algorithm. *Control Theory & Applications*, 2004, **21**(1): 89～93
(钱富才, 刘丁, 李云霞. 基于两级算法的对偶控制. 控制理论与应用, 2004, **21**(1): 89～93)

9 Reid R W, Cttron S J. On noninferior performance index vectors. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **7**(1): 110～118

10 Li D, Haimes Y Y. Multilevel methodology for a class of nonseparable optimization. *International Journal of Systems and Science*, 1990, **21**(11): 2351～2360

钱富才 西安理工大学自动化与信息工程学院教授. 主要研究方向为随机控制、系统辨识、非线性控制和大规模系统. 本文通信作者.
E-mail: fcqian@xaut.edu.cn
(**QIAN Fu-Cai** Professor at School of Automation and Information Engineering, Xi′an University of Technology. His research interest covers stochastic control, systems identification, nonlinear control, and large-scale systems. Corresponding author of this paper.)

高振斌 西安理工大学自动化与信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为随机自适应控制.
E-mail: gzhenbin824@163.com
(**GAO Zhen-Bin** Ph. D. candidate at School of Automation and Information Engineering, Xi′an University of Technology. His research interest is stochastic adaptive control.)

刘 丁 西安理工大学自动化与信息工程学院教授. 主要研究方向为智能控制、复杂系统建模、计算机控制和控制理论与应用. E-mail: liud@xaut.edu.cn
(**LIU Ding** Professor at School of Automation and Information Engineering, Xi′an University of Technology. His research interest covers intelligent control, modeling of complex systems , computer control, and control theory and applications.)