第25卷 第6期
1999年11月

自 动 化 学 报
ACTA AUTOMATICA SINICA

Vol. 25, No. 6
Nov., 1999

短 文

双线性系统的全局可镇定性[1)]

陆国平　　　　郑毓蕃

（南通工学院自动化系　南通　226007）　（华东师范大学系统科学研究所　上海　200062）

摘　要　讨论了多输入多输出双线性系统的全局可镇定问题. 利用 Lyapunov 方法，分别通过静态状态反馈和动态输出反馈得到双线性系统全局可镇定的充分条件，并且给出了相应控制器的设计方法.

关键词　双线性控制系统，全局可镇定性，静态状态反馈，动态输出反馈.

GLOBAL STABILIZABILITY OF BILINEAR SYSTEMS

LU Guoping

(*Department of Automatic Control, Nantong Institute of Technology, Nantong* 226007)

ZHENG Yufan

(*Institute of Systems Science, East-China Normal University, Shanghai* 200062)

Abstract　This paper deals with the global stabilization problem for the bilinear systems with multi-input and multi-output. By means of Lyapunov-based techniques, sufficient conditions for the global stabilizability of the bilinear systems are obtained via static state feedback and bounded dynamic output feedback, respectively. Moreover, the design scheme of the corresponding controllers is developed. The obtained results extend the known results.

Key words　Bilinear systems, global stabilizability, static state feedback, dynamic output feedback.

1　引言

非线性系统的镇定性问题是控制论中最为重要的问题之一. 双线性系统可以作为许多非线性系统的近似系统，并且其本身在工程中有广泛的应用，文[3]就上述系统具有纯

1)国家自然科学基金(No. 69674007)及南通工学院科研基金资助课题.

收稿日期　1997-09-22　　收修改稿日期　1998-09-30

虚特征谱的情形,利用静态状态反馈给出了单输入单输出严格双线性系统全局可镇定的充分条件.

本文讨论下列多输入多输出(MIMO)双线性系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

上式中 $B(\boldsymbol{x})=(B_1\boldsymbol{x}\quad B_2\boldsymbol{x}\quad \cdots\quad B_m\boldsymbol{x})$;常数矩阵 $A,B_j\in R^{n\times n}$;状态向量 $\boldsymbol{x}\in R^n$;$\boldsymbol{u}=(u_1\ u_2\ \cdots u_m)^{\mathrm{T}}$ 为 m 维控制输入;$\boldsymbol{y}\in R^p$ 为输出向量;常数矩阵 $C\in R^{p\times n}$,不失一般性,假设 $\mathrm{rank}C=p<n$.

本文的目的是利用静态状态反馈(SSF)以及有界动态输出反馈(BDOF)分别给出 MIMO 系统(1)和(2)全局可镇定的充分条件,并且分别给出了 SSF 以及降维($(n-p)$维) BDOF 镇定控制器的设计.本文所得到的充分条件与设计方法不同于文[1]和[3],并且比文献的主要结果更一般.

2　主要结果

首先,假设 A 的所有特征值为相异纯虚根,且特征值集 $\sigma(A)=\{\pm i\omega_k,k=1,2,\cdots,n_0\}$,其中 $n=2n_0$,$\boldsymbol{q}_k$ 和 $\bar{\boldsymbol{q}}_k$ 分别为 $i\omega_k$ 和 $-i\omega_k$ 的特征向量.设 $\Sigma_0=\{P:P\in R^{n\times n},P>0,A^{\mathrm{T}}P+PA\leqslant 0\}$;于是根据 Lyapunov 逆定理可得 $\Sigma_0\neq\varnothing$.下列定理给出了利用 SSF 控制器全局镇定系统(1)的充分条件.

定理1. 若存在 $P\in\Sigma_0$,对于任意的特征向量 $\boldsymbol{q}_i(i\in\underline{n_0})$,行向量 $\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}PB(\boldsymbol{q}_i)\neq 0$,则系统(1)可由 SSF 控制器全局镇定.

证明.选取 Lyapunov 函数 $V=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$,则 V 正定.构造如下静态状态反馈控制器 $\boldsymbol{u}=-cB^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})P\boldsymbol{x}$,其中 c 为任意正常数.若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 为满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$的相应闭环系统的轨线,则 V 沿着 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$的导数为 $\dot{V}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}-2c\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB(\boldsymbol{x})B^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})P\boldsymbol{x}\leqslant 0$.

下面利用 LaSalle 不变原理证明相应闭环系统的全局稳定性.根据该原理,相应闭环系统的所有轨线趋近于下列集合的最大不变子集 $\Omega=\{\boldsymbol{x}\in R^n\mid \dot{V}=0\}$.为此,$\dot{V}=0$意味 $u_j=0,j\in\underline{m}$,即 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB_j\boldsymbol{x}=0,j\in\underline{m}$.于是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$满足 $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}$,从而 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0$,而初始条件 $\boldsymbol{x}_0$可以表达成 $\boldsymbol{x}_0=\sum\limits_{k=1}^{n_0}(a_k\boldsymbol{q}_k+\bar{a}_k\bar{\boldsymbol{q}}_k)$,因此 $\boldsymbol{x}(t)$可简化为

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{k=1}^{n_0}(a_ke^{i\omega_kt}\boldsymbol{q}_k+\bar{a}_ke^{-i\omega_kt}\bar{\boldsymbol{q}}_k).$$

为了证明 $a_k=0,k\in\underline{n_0}$,不失一般性,假设 $\omega_{n_0}>\omega_{n_0-1}>\cdots>\omega_1>0$,则存在 $j_0\in\underline{m}$ 使得 $\boldsymbol{q}_{n_0}^{\mathrm{T}}PB_{j_0}\boldsymbol{q}_{n_0}\neq 0$.所以 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB_{j_0}\boldsymbol{x}=a_{n_0}^2\boldsymbol{q}_{n_0}^{\mathrm{T}}PB_{j_0}\boldsymbol{q}_{n_0}e^{i(2\omega_{n_0})t}+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda c}c(\lambda)e^{j\lambda t}$,其中 $c(\lambda)$为相应项的系数,$\Lambda=\{\omega_i\pm\omega_j,-\omega_i\pm\omega_j,i,j\in\underline{n_0}\}-\{2\omega_{n_0}\}$.显然,对所有的 $\lambda\in\Lambda$,有 $\lambda<2\omega_{n_0}$.于是 $a_{n_0}=0$,即 $\boldsymbol{x}(t)=\sum\limits_{k=1}^{n_0-1}(a_ke^{i\omega_kt}\boldsymbol{q}_k+\bar{a}_ke^{-i\omega_kt}\bar{q}_k)$.同样根据条件,存在 $j_1\in\underline{m}$ 使得 $q_{n_0-1}^{\mathrm{T}}PB_{j_1}\boldsymbol{q}_{n_0-1}\neq 0$.利用上述同样的方法可得 $a_{n_0-1}=0$.依此类推有 $a_k=0,k\in\underline{n_0}$,所以 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)=0$.

注1.在定理1中,若取 $P=S^{\mathrm{T}}S$,其中 $S=[\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}_1,\cdots,\mathrm{Re}(\boldsymbol{q}_n),\mathrm{Im}(\boldsymbol{q}_1),\cdots,\mathrm{Im}(\boldsymbol{q}_n)]^{-1}$,

则可以证明 $P\in\Sigma_0$. 事实上,$A^{\mathrm{T}}P+PA=S^{\mathrm{T}}[(SAS^{-1})^{\mathrm{T}}+SAS^{-1}]S$. 由 SAS^{-1}的反对称性可知 $A^{\mathrm{T}}P+PA=0$. 这是一种计算 P 的简单方法.

在定理1证明中,若取饱和反馈控制律 $\boldsymbol{u}=-c\mathrm{sat}[B^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})P\boldsymbol{x}]$,其中 c 为任意正常数,有

$$\mathrm{sat}[B^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})P\boldsymbol{x}]=(\mathrm{sat}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x})\quad \mathrm{sat}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B_2^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x})\ \cdots\ \mathrm{sat}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B_m^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}},$$

则系统(1)可由有界静态反馈(BSSF)控制器全局镇定. 这说明小增益反馈可以保证双线性系统全局可镇定性.

定理2. 若存在 $P\in\Sigma_0$,对于任意的特征向量 $\boldsymbol{q}_i(i\in\underline{n}_0)$,行向量 $\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}PB(\boldsymbol{q}_i)\neq 0$,并且$(C,A)$可检测. 则系统(1)和(2)可由降维($(n-p)$维)BDOF 控制器全局镇定.

证明. 根据假设可得存在常数矩阵 $D\in R^{(n-p)\times n}$使得 $U_0=\begin{pmatrix}C\\D\end{pmatrix}$ 可逆,令

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}=U_0AU_0^{-1},\ \begin{bmatrix}B_{j11} & B_{j12}\\ B_{j21} & B_{j22}\end{bmatrix}=U_0B_jU_0^{-1},j\in\underline{m}. \tag{3}$$

由(C,A)的可检测性得(A_{12},A_{22})可检测(参见文[4]),于是存在 $L\in R^{(n-p)\times p}$使得 $\sigma(A_{22}+LA_{12})\subset C^-$. 从而对于任意的常数 $\mu>0$,存在正定常数矩阵 $R\in R^{(n-p)\times(n-p)}$,使得

$$R(A_{22}+LA_{12})+(A_{22}+LA_{12})^{\mathrm{T}}R=-2\mu I_{n-p}. \tag{4}$$

取 $U=\begin{pmatrix}C\\LC+D\end{pmatrix}$,显然 U 可逆. 由此可取下列形式的降维($(n-p)$维)动态输出反馈控制器

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}}_2=[(A_{22}+LA_{12})+\sum_{j=1}^{m}(B_{j22}+LB_{j12})u_j]\hat{\boldsymbol{z}}_2+\{(LA_{11}+A_{21})-(LA_{12}+A_{22})L+\sum_{j=1}^{m}[LB_{j11}+B_{j21}-(LB_{j12}+B_{j22})L]u_j\}\boldsymbol{y}+R^{-1}W^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{m}(PB_j\hat{\boldsymbol{x}}+B_j^{\mathrm{T}}P\hat{\boldsymbol{x}})u_j, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{u}=-c\ \mathrm{sat}[B^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{x}})P\hat{\boldsymbol{x}}], \tag{6}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{z}}_2\in R^{n-p}$,$\hat{\boldsymbol{x}}=U^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}\\ \hat{\boldsymbol{z}}_2\end{pmatrix}$,$W=U^{-1}\begin{pmatrix}0\\ I_{n-p}\end{pmatrix}$,$c$ 为待定正常数,P 由假设条件或注1确定.

令 $\tilde{\boldsymbol{z}}_2=\boldsymbol{z}_2-\hat{\boldsymbol{z}}_2$,则

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{z}}}_2=\left[(A_{22}+LA_{12})+\sum_{j=1}^{m}(B_{j22}+LB_{j12})u_j\right]\tilde{\boldsymbol{z}}_2-R^{-1}W^T\sum_{j=1}^{m}(PB_j\hat{\boldsymbol{x}}+B_j^TP\hat{\boldsymbol{x}})u_j.$$

取 Lyapunov 函数 $V=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}+\tilde{\boldsymbol{z}}_2^{\mathrm{T}}R\tilde{\boldsymbol{z}}_2$. 由于 $\boldsymbol{x}=U^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}_1\\ \boldsymbol{z}_2\end{bmatrix}=\hat{\boldsymbol{x}}+W\tilde{\boldsymbol{z}}_2$,因此 V 沿着闭环系统(1),(5)和(6)的任一轨线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$,$\hat{\boldsymbol{z}}_2=\hat{\boldsymbol{z}}_2(t)$的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(PA+A^{\mathrm{T}}P)\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\sum_{j=1}^{m}B_j\boldsymbol{x}u_j+\tilde{\boldsymbol{z}}_2^{\mathrm{T}}[R(A_{22}+LA_{12})+(A_{22}+LA_{12})^{\mathrm{T}}R]\tilde{\boldsymbol{z}}_2+\\ &2\tilde{\boldsymbol{z}}_2^{\mathrm{T}}R\sum_{j=1}^{m}(B_{j22}+LB_{j12})\tilde{\boldsymbol{z}}_2u_j-2\tilde{\boldsymbol{z}}_2^{\mathrm{T}}W^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{m}(PB_j\hat{\boldsymbol{x}}+B_j^{\mathrm{T}}P\hat{\boldsymbol{x}})u_j\leqslant\\ &2\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}P\sum_{j=1}^{m}B_j\hat{\boldsymbol{x}}u_j-\tilde{\boldsymbol{z}}_2^{\mathrm{T}}\Big\{2\mu I-\sum_{j=1}^{m}[W^{\mathrm{T}}(PB_j+B_j^{\mathrm{T}}P)W+\\ &R(B_{j22}+LB_{j12})+(B_{j22}^{\mathrm{T}}+B_{j12}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}})R]u_j\Big\}\tilde{\boldsymbol{z}}_2.\end{aligned}$$

由式(6)可得$|u_j|\leqslant c$,$j\in \underline{m}$,即控制器有界,其中可选取 c 满足下列条件

$$c\sum_{j=1}^{m}\|W^{\mathrm{T}}(PB_j+B_j^{\mathrm{T}}P)W+R(B_{j22}+LB_{j12})+(B_{j22}^{\mathrm{T}}+B_{j12}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}})R\|<\mu. \tag{7}$$

于是 $\dot{V}\leqslant -2c\Sigma_{j=1}^{m}\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}PB_j\hat{\boldsymbol{x}}\mathrm{sat}(\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}PB_j\hat{\boldsymbol{x}})-\mu\tilde{\boldsymbol{z}}_2^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{z}}_2\leqslant 0$. 由 $\dot{V}=0$可得 $\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}PB_j\hat{\boldsymbol{x}}=0(j\in\underline{m})$,$\tilde{\boldsymbol{z}}_2=0$. 这意味着 $\hat{\boldsymbol{z}}_2=\boldsymbol{z}_2$,$u_j=0$,$j\in\underline{m}$,即轨线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$满足 $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}PB_j\boldsymbol{x}=0$. 以下的证明与定理1相同,故从略.

参 考 文 献

1 Ball J M,Slemord M. Nonharmonic Fourier series and the stabilization of distributed semi-linear control systems. *Comm. Pure Appl. Math.* ,1978,**32**:555～587

2 Besancon G,Hammouri H. On uniform observation of nonuniformly observable systems. *Systems Control Lett*,1996,**29**:9～19

3 Rahn C D. Stabilizability conditions for strictly bilinear ystems with purely imaginary spectra,*IEEE Trans. Autom. Control*,1996,**AC-41**(9):1346～1347

4 Wonham W M. Linear Multivariable Control. New York:Springer-Verlag,1974,55～85

陆国平　1965年生. 1998年6月在华东师范大学系统科学研究所获博士学位,现在南通工学院自动化系任教. 研究领域有非线性系统镇定问题、时滞系统和非线性系统鲁棒H_∞控制.

郑毓蕃　1941年生. 华东师范大学系统科学研究所教授,博士生导师,澳大利亚墨尔本大学电气工程系客座教授. 目前研究领域为非线性控制.