时滞切换系统指数稳定性分析: 多 Lyapunov 函数方法

丛 屾[1] 费树岷[2] 李 涛[2]

摘 要 将多 Lyapunov 函数方法推广至时滞情形, 分析切换与时滞对于稳定性的影响. 以 Halanay 不等式为引理, 给出了与时滞相关的切换序列约束条件, 以保证系统的指数稳定性. 若时滞项消失, 本文关于切换对于稳定性影响的分析与无时滞情形的相关结论是一致的. 仿真结果说明了本文方法的有效性.

关键词 切换系统, 时滞, 指数稳定, Halanay 不等式
中图分类号 TP273

Exponential Stability of Switched Systems with Delay: a Multiple Lyapunov Function Approach

CONG Shen[1] FEI Shu-Min[2] LI Tao[2]

Abstract The switched system consisting of a family of subsystems with delay is considered. In the time-delay situation, the multiple Lyapunov function approach is generalized to investigate the effect of switching and state-delay on stability. Using the Halanay inequality, the delay-dependent constraint condition on switching sequence is derived to guarantee the exponential stability. In the situation without time delay, the correspondent analysis result of switching effect on stability is a special case of our conclusions. Numerical examples are given to demonstrate the proposed approach.

Key words Switched systems, time-delay, exponential stability, Halanay inequality

1 引言

考虑若干线性时滞子系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A_i\boldsymbol{x}(t) + A_{i1}\boldsymbol{x}(t-r),\ t \geq t_0;\ i = 1, \cdots, N \tag{1a}$$

在取值于指标集 $\{1, \cdots, N\}$ 的右连续切换信号

$$s(t) = \Pi\left(t, s(t^-), \boldsymbol{x}(t)\right),\ t \geq t_0 \tag{1b}$$

驱动下构成的切换动力系统. 其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$ 为状态变量与时滞常数, $\{A_i, A_{i1}\}_{i=1}^N$ 为适当维数矩阵. $\Pi : [t_0, \infty) \times \{1, \cdots, N\} \times \mathbf{R}^n \to \{1, \cdots, N\}$ 表征了切换信号的动力学行为, 可以根据随时间的演化规律将其表述为切换序列的形式

$$\left\{(t_0, \pi(0)), \cdots, (t_k, \pi(k)), \cdots \mid \lim_{k\to\infty} t_k = \infty\right\} \tag{2}$$

收稿日期 2006-4-18 收修改稿日期 2006-11-6
Received April 18, 2006; in revised form November 6, 2006
国家自然科学基金 (60574006) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (60574006)
1. 南京理工大学自动化学院 南京 210094 2. 东南大学自动化研究所 南京 210096
1. Automation School, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094 2. Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096
DOI: 10.1360/aas-007-0985

这里 $t_k, \pi(k)$ 为切换时刻及相应的切换序列取值.

时滞与切换是影响系统稳定性的重要因素, 二者相互耦合可能导致复杂的动力学行为. 给定切换序列 (2), 系统 (1) 成为具有非连续时变系数矩阵的自治系统, 满足所谓 Caratheodory 条件[1]. 依据线性时滞型泛函微分方程的基本理论[1] 与稳定性理论[1], 可知其解的整体存在唯一性, 并且其一致渐近稳定性等价于指数稳定性.

无时滞条件下, 切换系统稳定性研究的本质方法不同程度地依赖于有限维欧式空间的几何结构: 非二次型 Lyapunov 函数方法构建于欧式空间中不变集与能量衰减域的几何刻画[2~5], 多 Lyapunov 函数方法[6,7] 根植于不同 Lyapunov 函数在欧式空间上的几何相容性[1]. 由于时滞的存在, 相空间提升为无穷维函数空间, 这些方法失去了其适用条件; 特别地, Lyapunov-Krasovskii 泛函不具备在有限维空间上的几何相容性.

切换系统的非连续性与时变性取决于切换序列的行为. 对于给定切换序列 (2), 其相邻两次切换时间间隔的下界 $T_D := \inf\limits_{k=0,1,\cdots}\{t_{k+1} - t_k\} \geq 0$ 称为"最小驻留时间", 是刻画切换信号随时间演化规律, 反映其变化剧烈程度, 从而描述整个系统非连续性与时变性的重要物理量[8]. 本文借助 Lyapunov 函数在分析非连续时变系统稳定性时特有的灵活性[9], 将多 Lyapunov 函数方法推广至时滞情形, 分析时滞与切换对于整个系统稳定性的影响, 并将其归结为寻求时滞常数与最小驻留时间的约束条件及其相互之间的耦合关系, 使整个系统是指数稳定的.

2 记号与引理

$\lambda_{\max}(\cdot), \lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示实对称矩阵的最大与最小特征值; 对于给定欧式空间中集合, $co\{\cdot\}$ 表示其凸闭包; D^+ 表示实值连续函数的右导数算子.

下述引理为微分方程比较原理在时滞情形下的推广, 称为 Halanay 不等式[10].

引理 1. 若 $r \geq 0, a > b > 0$, 非负实值连续函数 $u(t)$ 满足 $D^+u(t) \leq -au(t) + b\sup\limits_{-r\leq\theta\leq 0} u(t+\theta)$, $t \geq t_0$, 则 $u(t) \leq \sup\limits_{-r\leq\theta\leq 0} u(t_0+\theta)\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}$, $t \geq t_0$, 其中 $\mu > 0$ 满足 $\mu - a + b\mathrm{e}^{\mu r} = 0$.

设可测向量值函数集合

$$M := \left\{[m_1, \cdots, m_N]^{\mathrm{T}} \mid \sum_{i=1}^N m_i(t) \equiv 1,\ m_i(t) \geq 0,\ t \geq t_0\right\}$$

根据非连续系统的描述方法[11], 对于任意切换序列, 系统 (1) 等价地转化为微分包含的形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \in F(\boldsymbol{x}_t),\ t \geq t_0 \tag{3}$$

其中 $F(\boldsymbol{x}_t) := co\{A_i\boldsymbol{x}(t) + A_{i1}\boldsymbol{x}(t-r) | i = 1, \cdots, N\}$.

引理 2. 对于所有 $[m_1, \cdots, m_N]^{\mathrm{T}} \in M$, 微分包含 (3) 与下列泛函微分方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + A_1(t)\boldsymbol{x}(t-r),\ t \geq t_0 \tag{4}$$

[1]拓扑空间 $\{\Omega, \tau\}$ 上非负连续实值函数 u, v 具有几何相容性, 如果存在 $0 < \alpha < \beta$, 使得 $\alpha v(\omega) \leq u(\omega) \leq \beta v(\omega), \forall\omega \in \Omega$.

解的集合是一致的, 其中 $A(t) := \sum_{i=1}^{N} m_i(t)A_i, A_1(t) := \sum_{i=1}^{N} m_i(t)A_{i1}$.

证明. 依据凸闭包集合定义可知, 对于所有 $[m_1,\cdots,m_N]^{\mathrm{T}} \in M$, 方程 (4) 解的集合为微分包含 (3) 的子集; 反之, 依据微分包含 (3) 解的构造可知, 对于其给定解 $\boldsymbol{x}(t), t \ge t_0 - r$, 存在 $[m_1,\cdots,m_N]^{\mathrm{T}} \in M$, 使得 $\boldsymbol{x}(t)$ 为方程 (4) 的解. 因此, 微分包含 (3) 与泛函微分方程 (4) 解的集合是一致的. □

引理 2 反映了切换系统的时变本质[12], 有助于分析在任意切换作用下其解的性态.

3 多 Lyapunov 函数方法稳定性分析

时滞系统的稳定性准则之间存在较大差异, 大体上可分为时滞相关性判据与时滞无关性判据, 更为细微的差别是难以概述的. 考虑到切换系统的时变性, 则需忽略子系统稳定性准则之间的异性, 提取其共性加以描述与分析, 这是本文的基本出发点.

引理 3. 对于时滞系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-r), t \ge t_0$, 如果存在对称矩阵 $P > 0$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P + 2rP & rPA_1A & rPA_1^2 \\ rA^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}P & -rP & 0 \\ rA_1^{2\mathrm{T}}P & 0 & -rP \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

那么其零解指数稳定, 这里 $\bar{A} := A + A_1$.

证明. 根据 $\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(t-r) = \int_{t-r}^{t} \dot{\boldsymbol{x}}(\theta)\mathrm{d}\theta$, 原方程转化为下述形式

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \bar{A}\boldsymbol{x}(t) - A_1\int_{t-r}^{t}[A\boldsymbol{x}(\theta) + A_1\boldsymbol{x}(\theta-r)]\mathrm{d}\theta \\ &= \bar{A}\boldsymbol{x}(t) - A_1A\int_{t-r}^{t}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta - A_1^2\int_{t-2r}^{t-r}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{6}$$

方程 (6) 的稳定性蕴涵着原系统的稳定性. 由不等式 (5) 的严格性可知, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\begin{aligned} &P\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P + rPA_1AP^{-1}A^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}P + \\ &\qquad rPA_1^2P^{-1}A_1^{2\mathrm{T}}P + (2r+\varepsilon)P < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

构造 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Px$, 根据式 (7) 推知其沿着方程 (6) 解轨线的导数满足

$$\begin{aligned} &\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \\ &= 2\left[\bar{A}\boldsymbol{x}(t) - A_1A\int_{t-r}^{t}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta + A_1^2\int_{t-2r}^{t-r}\boldsymbol{x}(\theta)\mathrm{d}\theta\right]^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t) \\ &= 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t) - 2\int_{t-r}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)A^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\theta - \\ &\quad 2\int_{t-2r}^{t-r}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\theta)A_1^{2\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\theta \\ &\le 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t) + \int_{t-r}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PA_1AP^{-1}A^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\theta + \\ &\quad \int_{t-2r}^{t-r}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)PA_1^2P^{-1}A_1^{2\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\theta + \int_{t-2r}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\theta \\ &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\left[P\bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}}P + rPA_1AP^{-1}A^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}P + \right. \\ &\quad \left. rPA_1^2P^{-1}A_1^{2\mathrm{T}}P\right]\boldsymbol{x}(t) + \int_{t-2r}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\theta \\ &\le -(2r+\varepsilon)V(\boldsymbol{x}(t)) + 2r\sup_{-2r\le\theta\le 0}V(\boldsymbol{x}(\theta)),\ t \ge t_0 \end{aligned}$$

由引理 1 得到, $V(\boldsymbol{x}(t)) \le \sup\limits_{-2r\le\theta\le 0} V(\boldsymbol{x}(t_0+\theta))\,\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}$, $t \ge t_0$, 其中 $\mu > 0$ 满足 $\mu - (2r+\varepsilon) + 2r\mathrm{e}^{\mu r} = 0$, 因此 $|\boldsymbol{x}(t)| \le \left[\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right]^{\frac{1}{2}} \sup\limits_{-2r\le\theta\le 0}|\boldsymbol{x}(t_0+\theta)|\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mu(t-t_0)}, t \ge t_0$. □

定理 1. 设 $\{\bar{A}_i := A_i + A_{i1}\}_{i=1}^{N}$. 如果存在常数 $\eta > 0$, 使得关于对称矩阵 $\{P_i > 0\}_{i=1}^{N}$ 的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} P_i\bar{A}_i + \bar{A}_i^{\mathrm{T}}P_i + (2r+\eta)P_i & rP_iA_{i1}A_i & rP_iA_{i1}^2 \\ rA_i^{\mathrm{T}}A_{i1}^{\mathrm{T}}P_i & -rP_i & 0 \\ rA_{i1}^{2\mathrm{T}}P_i & 0 & -rP_i \end{bmatrix} < 0$$
$$i = 1,\cdots,N \tag{8}$$

可解, 那么存在常数 $T_D > 0$, 使得系统 (1) 在满足如下约束条件的切换序列

$$\left\{(t_0,\pi(0)),\cdots,(t_k,\pi(k)),\cdots \mid \inf_{k\ge 0}(t_{k+1}-t_k) \ge T_D\right\}$$

驱动下指数稳定.

证明. 构造 Lyapunov 函数 $V_i(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P_i\boldsymbol{x}(t); i = 1,\cdots,N$. 存在 $\chi \ge 1$ 使得 $V_i(\boldsymbol{x}) \le \chi V_j(\boldsymbol{x}), \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n; i,j = 1,\cdots,N$. 事实上, 可设 $\chi := \max\limits_{1\le i,j\le N}\left\{\frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_j)}, i \ne j\right\}$. 根据引理 3, 矩阵不等式 (8) 蕴涵着子系统指数稳定, 并且对于任意 $k = 0,1,\cdots$ 成立

$$V_{\pi(k)}(t_{k+1}^-) \le \sup_{-2r\le\theta\le 0} V_{\pi(k)}(t_k+\theta)\mathrm{e}^{-\mu(t_{k+1}-t_k)} \tag{9}$$

其中 $\mu > 0$ 满足 $\mu - (2r+\eta) + 2r\mathrm{e}^{\mu r} = 0$.

对于 $\forall\,\theta \in [-2r, 0]$, 存在如下估计

$$\begin{aligned} V_{\pi(k)}(t_k+\theta) &\le \chi V_{\pi(k-1)}(t_k+\theta) \\ &\le \chi\left[\sup_{-2r\le\theta\le 0} V_{\pi(k-1)}(t_{k-1}+\theta)\right]\mathrm{e}^{-\mu(t_k+\theta-t_{k-1})} \\ &\le \chi\mathrm{e}^{2r\mu}\left[\sup_{-2r\le\theta\le 0} V_{\pi(k-1)}(t_{k-1}+\theta)\right]\mathrm{e}^{-\mu(t_k-t_{k-1})} \end{aligned} \tag{10}$$

结合 (9) 和 (10) 推知

$$\begin{aligned} V_{\pi(k)}(t_{k+1}^-) &\le \chi\mathrm{e}^{2r\mu}\mathrm{e}^{-\mu(t_{k+1}-t_{k-1})} \times \\ &\qquad \left[\sup_{-2r\le\theta\le 0} V_{\pi(k-1)}(t_{k-1}+\theta)\right] \end{aligned}$$

由此递归得到

$$\begin{aligned} &V_{\pi(k)}(t_{k+1}^-) \\ &\quad\le \sup_{-2r\le\theta\le 0} V_{\pi(0)}(t_0+\theta)\chi^k\prod_{i=0}^{k-1}\mathrm{e}^{2r\mu}\prod_{i=0}^{k}\mathrm{e}^{-\mu(t_{i+1}-t_i)} \\ &\quad= \sup_{-2r\le\theta\le 0} V_{\pi(0)}(t_0+\theta)\left[\chi\mathrm{e}^{2r\mu}\right]^k\mathrm{e}^{-\mu(t_{k+1}-t_0)} \end{aligned} \tag{11}$$

选取 $T_D > 2r + \mu^{-1}\ln\chi$. 若相邻切换时刻间隔满足约束 $t_{k+1} - t_k \ge T_D; k = 0,1,\cdots$, 则可知

$$k \le \frac{t_k - t_0}{T_D},\ k = 1,2,\cdots \tag{12}$$

设 $\lambda := -\frac{1}{2}\left(\frac{2r\mu+\ln\chi}{T_D} - \mu\right) > 0$, 结合式 (11) 和 (12) 推知

$$\begin{aligned} &V_{\pi(k)}(t_{k+1}^-) \\ &\quad\le \sup_{-2r\le\theta\le 0} V_{\pi(0)}(t_0+\theta)\left[\chi\mathrm{e}^{2r\mu}\right]^{\frac{t_{k+1}-t_0}{T_D}}\mathrm{e}^{-\mu(t_{k+1}-t_0)} \\ &\quad= \sup_{-2r\le\theta\le 0} V_{\pi(0)}(t_0+\theta)\exp\left[\left(\frac{2r\mu+\ln\chi}{T_D} - \mu\right)(t_{k+1}-t_0)\right] \end{aligned}$$

从而 $|\boldsymbol{x}(t_{k+1})| \le \chi^{\frac{1}{2}} \sup\limits_{-2r\le\theta\le 0} |\boldsymbol{x}(t_0+\theta)| \mathrm{e}^{-\lambda(t_{k+1}-t_0)}$. □

注 1. 在定理 1 的结论中, 时滞对于系统稳定性的影响同时反映于子系统的稳定判据与切换序列的约束条件中. 若 $r=0$, 即时滞项消失, 则定理 1 的结论与无时滞条件下多 Lyapunov 函数稳定性分析方法的结论是一致的[7].

根据定理 1 的结论, 公共 Lyapunov 函数的存在性并不意味着系统在任意切换序列驱动下的稳定性, 但是蕴涵着 $\chi=1$, 由此得到下述推论.

推论 1. 如果线性矩阵不等式 (8) 存在公共解, 那么只要相邻两次切换时刻间隔 $T_D \ge 2r$, 则系统 (1) 保持指数稳定.

引理 4. 对于时滞系统 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-r), t\ge t_0$, 如果存在对称矩阵 $P>0$ 满足下列线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}}P+PA+P & PA_1 \\ A_1^{\mathrm{T}}P & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

那么其零解指数稳定.

证明. 由不等式 (13) 的严格性可知, 存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+PA_1P^{-1}A_1^{\mathrm{T}}P+(1+\varepsilon)P<0 \tag{14}$$

构造 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$, 根据不等式 (14) 推知其沿着系统解轨线的导数满足

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &= 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P[A\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-r)] \\ &\le \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}P+PA+PA_1P^{-1}A_1^{\mathrm{T}}P]\boldsymbol{x}(t)+ \\ &\quad \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-r)P\boldsymbol{x}(t-r) \\ &\le -(1+\varepsilon)V(t)+\sup_{-r\le\theta\le 0}V(t+\theta),\ t\ge t_0\end{aligned}$$

由引理 1 得到 $V(t)\le \sup\limits_{-r\le\theta\le 0} V(t_0+\theta)\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}, t\ge t_0$, 其中 $\mu>0$ 满足 $\mu-(1+\varepsilon)+\mathrm{e}^{\mu r}=0$. 因此, $|\boldsymbol{x}(t)| \le \left[\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\right]^{\frac{1}{2}} \sup\limits_{-r\le\theta\le 0}|\boldsymbol{x}(t_0+\theta)|\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}\mu(t-t_0)}$, $t\ge t_0$. □

定理 2. 如果存在常数 $\eta>0$, 使得关于对称矩阵 $\{P_i>0\}_{i=1}^N$ 的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_iA_i+(1+\eta)P_i & P_iA_{i1} \\ A_{i1}^{\mathrm{T}}P_i & -P_i \end{bmatrix} < 0,\ i=1,\cdots,N \tag{15}$$

可解, 那么存在常数 $T_D>0$, 使得系统 (1) 在满足如下约束条件的切换序列

$$\left\{(t_0,\pi(0)),\cdots,(t_k,\pi(k)),\cdots \mid \inf_{k\ge 0}(t_{k+1}-t_k)\ge T_D\right\}$$

驱动下指数稳定.

证明. 根据引理 4, 不等式 (15) 蕴涵着子系统指数稳定. 选取 $T_D>r+\mu^{-1}\ln\chi$, 其中 $\mu>0$ 满足 $\mu-(1+\eta)+\mathrm{e}^{\mu r}=0$, $\chi:=\max\limits_{1\le i,j\le N}\left\{\frac{\lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(P_j)}, i\ne j\right\}\ge 1$, 通过与定理 1 相似的论证过程即可得证, 从略. □

注 2. 定理 2 中子系统稳定准则是与时滞无关的, 对于时滞常数为无限大的极端情形, 其结论说明, 即使所有子系统是稳定的, 有限时间间隔的切换序列即可能导致整个系统失去稳定性.

注 3. 时滞切换系统稳定性分析的保守性体现于：1) 子系统稳定判据的保守程度, 这与时滞系统稳定性分析保守性的经典概念是一致的；2) 最小驻留时间对于时滞的敏感程度, 这是切换系统的特殊性所在. 直观上, 若系统稳定性准则所容许的时滞常数越大, 最小驻留时间越小, 则其保守性越弱. 定理 1 与定理 2 的结论说明, 二者是相互制约的. 为保证整个系统的稳定性, 若时滞常数越大, 则切换信号变化越平缓；反之, 若切换信号变化越剧烈, 则时滞常数越小.

推论 2. 如果不等式 (15) 存在公共解, 那么系统 (1) 在任意切换序列驱动下保持指数稳定.

证 明. 依据引理 2, 只要证明, 对于所有 $[m_1,\cdots,m_N]^{\mathrm{T}}\in M$, 泛函微分方程 (4) 是指数稳定的. 根据不等式 (15) 的线性与严格性可知, 存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\begin{aligned}&P\sum_{i=1}^N m_iA_i+\sum_{i=1}^N m_iA_i^{\mathrm{T}}P+ \\ &\quad P\sum_{i=1}^N m_iA_{i1}P^{-1}\sum_{i=1}^N m_iA_{i1}^{\mathrm{T}}P+(1+\varepsilon)P<0\end{aligned} \tag{16}$$

其中, $0\le m_i\le 1$; $i=1,\cdots,N$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^N m_i=1$.

构造 Lyapunov 函数 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Px$, 依据不等式 (16) 可知其沿着方程 (4) 解轨线的导数满足

$$\begin{aligned}D^+V(t) &= 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P[A(t)\boldsymbol{x}(t)+A_1(t)\boldsymbol{x}(t-r)]\le \\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)[A^{\mathrm{T}}(t)P+PA(t)+PA_1(t)P^{-1}\times \\ &A_1^{\mathrm{T}}(t)P]\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-r)P\boldsymbol{x}(t-r)\le \\ &-(1+\varepsilon)V(t)+\sup_{-r\le\theta\le 0}V(t+\theta),\ t\ge t_0\end{aligned}$$

其余仿照引理 4 的论证过程即可得证, 从略. □

4　仿真分析

例 1. 设

$$A_1=\begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -1 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_{11}=A_{21}=\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$

时滞常数 $r=0.24\,\mathrm{s}$. 矩阵不等式 (8) 存在公共解 $P=\begin{bmatrix} 0.70 & -0.27 \\ -0.27 & 0.73 \end{bmatrix}$. 以切换时间间隔 $T_D=0.5\,\mathrm{s}>2r$ 为周期的切换序列驱动下状态轨线如图 1 点划线所示 (见下页).

例 2. 设

$$A_1=\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A_{11}=A_{21}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

矩阵不等式 (15) 存在公共解 $P=\begin{bmatrix} 0.20 & -0.02 \\ -0.02 & 0.27 \end{bmatrix}$. 时滞常数 $r=2.0\,\mathrm{s}$, 随机切换序列驱动下状态轨线如图 1 实线所示.

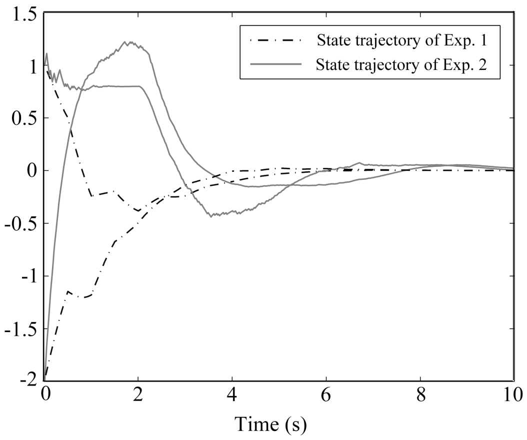

图 1　例 1 与例 2 仿真结果
Fig. 1　Simulation results of Exp.1 and Exp.2

5　结论

利用多 Lyapunov 函数方法分析切换与时滞对于稳定性的作用. 在考虑时变非连续系统时, Lyapunov 函数的灵活性结合 Halanay 不等式条件的可构造性与结论的解析性, 使之较于 Lyapunov-Krasovskii 与 Lyapunov-Razumikhin 方法更具适用性. 本文工作涵盖了无时滞情形下多 Lyapunov 函数方法稳定性分析的相关结论, 提示了时滞切换系统稳定性分析中一些有趣的现象, 并给出了解决问题的思路.

References

1 Hale J. *Theory of Functional Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1977

2 Blanchini F. Nonquadratic Lyapunov functions for robust control. *Automatica*, 1995, **31**(3): 451∼461

3 Cong Shen, Fei Ji-Qing, Fei Shu-Min. Exponential stability of seconde-order switched systems. *Control and Decision*, 2006, **21**(10): 1177∼1180
(丛屾, 费吉庆, 费树岷. 二维切换系统指数镇定问题研究. 控制与决策, 2006, **21**(10): 1177∼1180)

4 Lin H, Antsaklis P. A necessary and sufficient condition for robust asymptotic stabilizability of continuous time uncertain switched linear system. In: Proceedings of 43rd IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2004, **4**: 3690∼3695

5 Molchanov A P, Pyatnitsky Y S. Criteria of asymptotic stability of differentail and difference inclusions encountered in control theory. *Systems & Control Letters*, 1989, **13**(1): 59∼64

6 Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(4): 475∼482

7 Liberzon D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switching system. *IEEE Control Systems*, 1999, **19**(10): 59∼70

8 Liberzon D, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell-time. In: Proceedings of 38th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 1999. 2655∼2660

9 Fu Xi-Lin, Yan Bao-Qiang, Liu Yan-Sheng. *Introduction to Impulsive Differential System*. Beijing: Science Press, 2005
(傅希林, 闫宝强, 刘衍胜. 脉冲微分系统引论. 北京: 科学出版社, 2005)

10 Halanay A. *Differential Equations: Stability, Oscilations, Time Lags*. New York: Academic Press, 1966

11 Filippov A V. *Differential Equations with Discontinuous Right-hand Sides*. Amsterdam: Kluwer Academic Press, 1988

12 Pyatnitsky Y S, Rapoport L B. Criteria of asymptotic stability of differentail inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Circuits & Systems - I*, 1996, **43**(3): 219∼229

丛 屾　南京理工大学自动化学院讲师. 2007 年于东南大学自动化研究所取得博士学位. 主要研究方向为切换系统与时滞系统. 本文通信作者. E-mail: shen_tsong@163.com
(**CONG Shen**　Lecturer at Automation School, Nanjing University of Science and Technology. He received his Ph. D. degree from Research Institute of Automation, Southeast University in 2007. His research interest covers switched system and time-delay system. Corresponding author of this paper.)

费树岷　东南大学自动化研究所教授. 主要研究方向为非线性系统与切换系统. E-mail: smfei@seu.edu.cn
(**FEI Shu-Min**　Professor at Research Institute of Automation, Southeast University. His research interest covers nonlinear system and switched system.)

李 涛　东南大学自动化研究所博士研究生. 主要研究方向为泛函微分方程稳定性. E-mail: liguangyong1979@sohu.com
(**LI Tao**　Ph. D. candidate at Research Institute of Automation, Southeast University. His main research interest is stability of functional differential equations.)