第20卷 第1期　　自 动 化 学 报　　Vol. 20, No. 1
1994 年 1 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Jan., 1994

短 文

确定 ARMA 模型 MA 阶数的一种方法

张 贤 达
(清华大学自动化系，100084)

摘　　要

本文提出一种 ARMA 模型 MA 定阶的新方法. 其基本思想是，将阶数确定转化为一上三角阵的秩的确定. 仿真例子表明，该方法在数值上是鲁棒的.

关键词: 系统辨识，ARMA 模型，阶数确定，奇异值分解，总体最小二乘法

1　引言

在系统辨识及谱分析等中，模型阶数的选择对于任何实际应用而言都是非常重要的. 有关 ARMA 模型 AR 阶数的确定，已提出了不少方法. 这些定阶方法大致可分为两类: 信息量准则法与线性代数法. 后者有 Chow 的行列式试验法[1]，Cadzow 的奇异值分解 (SVD) 法[2]等.

Chow 早已证明[1]，ARMA 模型的 MA 阶数可以通过两个线性方程来确定，但未介绍具体算法. 事实上，对于这个定阶问题迄今仍无一种较简单有效的方法. 本文可望解决这一问题.

2　问题的描述及 AR 辨识

考虑一个因果、稳定的时不变 ARMA 过程

$$\sum_{i=0}^{p} a(i)x(n-i)=\sum_{j=0}^{q} b(j)w(n-j). \tag{1}$$

式中 $a(0)=1$，激励 $w(n)$ 是一个高斯白噪声，其均值为零、方差为 σ^2. 为了保证ARMA模型的唯一性，通常假定 $a(p)\neq 0$ 及 $b(q)\neq 0$. 不失一般性，还假定 $q\leqslant p$.

令 $r(l)$ 代表 $\{x(n)\}$ 的自相关函数，即 $r(l)=E[x(n)x(n+l)]$. 系统辨识的目的是，利用 $r(l)$ 的样本估值 $\hat{r}(l)$ 确定 AR 阶数 p 及参数 $a(i)$ 以及 MA 阶数 q 与参数 $b(j)$. 本文要讨论的问题是，如何利用样本自相关 $\hat{r}(l)$ 确定 MA 阶数 q. 本文将提出的 MA 定阶法需要用到 AR 阶数及参数. 为使本文在内容上可自容，下面扼要叙述 Cadzow 提出的 AR 定价的 SVD 法及估计 AR 参数的 SVD-TLS 法 (TLS: 总体最

本文于 1992 年 4 月 21 日收到.

小二乘)[2]。

众所周知，AR 系数与自相关 $r(l)$ 服从下列修正尤拉-沃克（MYW）方程：

$$\sum_{i=0}^{p} a(i)r(l-i)=0,\quad l>q, \tag{2}$$

且自相关阵

$$R=\begin{bmatrix} r(q+1) & r(q) & \cdots & r(q+1-p) \\ r(q+2) & r(q+1) & \cdots & r(q+2-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(q+p+1) & r(q+p) & \cdots & r(q+1) \end{bmatrix} \tag{3}$$

具有秩 p。更一般地，Cadzow[2] 建议采用超定的 MYW 方程估计 AR 参数，并证明了对于扩展阶 $p_e \geqslant p$ 及 $q_e \geqslant q$，若选择 $q_e-p_e \geqslant q-p$，则扩展阶的自相关阵

$$R_e=\begin{bmatrix} r(q_e+1) & r(q_e) & \cdots & r(q_e+1-p_e) \\ r(q_e+2) & r(q_e+1) & \cdots & r(q_e+2-p_e) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r(q_e+t) & r(q_e+t-1) & \cdots & r(q_e+t-p_e) \end{bmatrix} \tag{4}$$

亦具有秩 p。虽然 p 及 q 在实际应用中是未知的，但易选择 $p_e \gg p$ 及 $q_e \gg q$ 使得 $q_e-p_e > q-p$。实际中只能使用样本自相关。此时，将 $r(l)$ 用 $\hat{r}(l)$ 代替后的 R_e 记作 $\hat{R}_e$。Cadzow 的定阶方法就是利用 $\hat{R}_e$ 的 SVD 求其有效秩，用它作为 AR 阶数。令 $\hat{R}_e$ 的 SVD 为

$$\hat{R}_e=\sum_{i=1}^{p_e+1} \sigma_{ii} u_i v_i^*, \tag{5}$$

且其有效秩为 p，非负的奇异值 σ_{ii} 按照 $\sigma_{11} \geqslant \sigma_{22} \geqslant \cdots \geqslant \sigma_{p_e+1,p_e+1} \geqslant 0$ 的顺序排列。计算 $(p+1)\times(p+1)$ 阶矩阵

$$s^{(p)}=\sum_{n=1}^{p}\sum_{k=1}^{p_e-p+1} \sigma_{nn}^2 v_n^k v_n^{k*}, \tag{6}$$

其中符号 * 为共轭转置，而 v_n^k 表示由下式定义的 $(p+1)\times 1$ 列向量

$$v_n^k=[v_n(k),v_n(k+1),\cdots,v_n(k+p)]^T. \tag{7}$$

此处 $v_n(k)$ 系第 n 个右奇异向量 v_n 中的第 k 个元素。于是，p 个 AR 参数由下式可以求出[2]：

$$a(i)=s^{-(p)}(i+1,1)/s^{-(p)}(1,1),\quad i=1,\cdots,p, \tag{8}$$

其中 $s^{-(p)}(i,1)$ 代表 $s^{(p)}$ 的逆阵第 i 行第 1 列的元素。这就是 Cadzow 的估计 AR 参数的 SVD 法。

通常，信号 $x(n)$ 是在加性的观测噪声 $v(n)$ 中被观测的

$$y(n)=x(n)+v(n). \tag{9}$$

本文只考虑 $v(n)$ 为高斯白噪声的情况。此时，

$$r_y(l)=r(l)+\sigma_v^2\delta(l). \tag{10}$$

其中 $r_y(l)$ 及 σ_v^2 分别为 $\{y(n)\}$ 的自相关及 $v(n)$ 的方差。不难看出，在此种情况下，

若选择 $q_e = p_e \gg p$，则在式(4)的矩阵 R_e 中将不包含 $r(0)$，从而由式(10)知，R_e 中的 $r(l)$ 恒可用 $r_y(l)$ 代替．即理论上可避免白噪声 $v(n)$ 对 AR 辨识的影响．

Cadzow 的 AR 参数估计法不仅使用 SVD，而且对方程 $Ax = b$ 既考虑 b 中的误差，也考虑 A 中的误差，因此是一种 SVD-TLS 法．文献[2—4]中的仿真例子表明，用 SVD 定阶及用 SVD-TLS 进行参数估计，对于短数据组及较低的信噪比，能给出很好的估计结果，在数值上是鲁棒的．

3 MA 阶数的确定

MA 阶数 q 隐含在由 AR 参数及自相关描述的关系式中．利用这种关系可确定出 q．这一思想是 Chow 提出的[1]．利用 MYW 方程(2)及

$$\sum_{i=0}^{p} a(i)r(l-i) \neq 0, \quad l \leqslant q \tag{11}$$

来确定 MA 阶数 q，因为 q 是使式(11)得以满足的最大正整数．记

$$e(l) = \sum_{i=0}^{p} a(i)r(l-i), \tag{12}$$

则式(11),(2)可分别写作

$$e(l) \neq 0, \quad l \leqslant q; \tag{13 a}$$

$$e(l) \equiv 0, \quad l > q. \tag{13 b}$$

然而，当数据较短，特别是当存在观测噪声 $v(n)$ 时，由样本自相关 $\hat{r}(l)$ 及 AR 参数估值 $\hat{a}(i)$ 计算得出的 $\hat{e}(l)$ 在 $l > q$ 时并不等于零，而呈现一个扰动，且随 l 的增大而随机变化．因此，利用 $\hat{e}(l)$ 的截尾来定 q 往往是困难的．

回顾 Cadzow 的 SVD 定阶法知，AR 阶数 p 的确定变成了矩阵 R_e 有效秩的确定．将这一思想拓广到 MA 定阶的情况．为此考察用 $e(l)$ 作元素的上三角阵

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} e(0) & e(1) & \cdots & e(q) \\ e(1) & \cdots & e(q) & \\ \vdots & \iddots & & \\ e(q) & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

由式(13)有 $e(q) \neq 0$，这使得上三角阵 E 是满秩的，即秩 $(\boldsymbol{E}) = q + 1$．

更一般地，考虑扩展阶 $q_e \geqslant q$ 的情况

$$\boldsymbol{E}_e = \begin{bmatrix} e(0) & e(1) & \cdots & e(q_e) \\ e(1) & \cdots & e(q_e) & \\ \vdots & \iddots & & \\ e(q_e) & & & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

利用式(13)，显然

$$秩\ (\boldsymbol{E}_e) = 秩\ (E) = q + 1. \tag{16}$$

于是，将 MA 阶数 q 的确定变成了上三角阵 E_e 有效秩的确定。值得指出的是，由于矩阵 E_e 的特殊性，有效秩的确定等价于检验

$$\prod_{i=1}^{q+1} e(l) = e^{l+1}(l) \tag{17}$$

是否等于零，即 q 是使

$$e^{l+1}(l) \neq 0, \quad l \leqslant q \tag{18}$$

的最大正整数。虽然当 $l > q$ 时 $\hat{e}(l)$ 不会严格等于零，使得直接检验 $\hat{e}(l) \neq 0$，$l \leqslant q$ 及 $\hat{e}(l) = 0$，$l > q$ 变得困难，但是由于 $\hat{e}(l)$ 一般较小，从而使得检验 $\hat{e}^{l+1}(l) \neq 0$，$l \leqslant q$ 及 $\hat{e}^{l+1}(l) = 0$，$l > q$ 要容易得多。可以期望，利用式(18)确定阶数 q 在数值上比利用 Chow 的思想定阶要具有好得多的鲁棒性。

4　仿真实验与讨论

为了检验本文定阶方法的性能，用多个例子进行仿真实验，均取得了满意的定阶结果。本节介绍其中的一例。取数据长度 $N = 128$，样本自相关用

$$\hat{r}(l) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-l} y(n)y(n+l), \quad l \geqslant 0 \tag{19}$$

估计，且 $\hat{r}(-l) = \hat{r}(l)$。自相关阵 $\hat{R}_e$ 取作 30×15 阶，即 $t = 30$，$q_e = p_e = 14$。独立运行 10 次，信噪比定义为

$$SNR(dB) = 10 \log_{10}\left(\frac{P_x}{P_v}\right), \tag{20}$$

式中 P_x 及 P_v 分别为无噪声信号 $x(n)$ 及观测噪声 $v(n)$ 的功率。$x(n)$ 是用下式产

表 1　参数估计结果(均值±离差)

$a(1)$	$a(2)$	$a(3)$	$a(4)$
−2.948722 (±0.007919)	4.047889 (±0.018559)	−2.762014 (±0.017801)	0.877912 (±0.006654)

k	$e(k)$	$\|e^{k+1}(k)\|$
0	−0.023965 (±0.002766)	0.023965 (±0.002766)
1	−0.190441 (±0.002124)	0.036272 (±0.000808)
2	1.173020 (±0.006869)	* 1.614212 (±0.028371)
3	−0.035808 (±0.003819)	0.000002 (±0.000001)
4	0.058163 (±0.001985)	0.000001 (±0.000000)
5	0.100293 (±0.000861)	0.000001 (±0.000000)
6	0.091580 (±0.001223)	0.000000 (±0.000000)
7	0.136571 (±0.001509)	0.000000 (±0.000000)
8	−0.113509 (±0.002063)	0.000000 (±0.000000)
9	−0.072863 (±0.001086)	0.000000 (±0.000000)

生的:

$$x(n)-2.9429x(n-1)+3.8566x(n-2)-2.4952x(n-3)$$
$$+0.7067x(n-4)=w(n)-1.5w(n-1)+0.8w(n-2).$$

激励白噪声 $w(n)$ 的方差为 1，观测噪声 $v(n)$ 是另一与 $w(n)$ 独立的白噪声，其方差 σ_v^2 可调以使得 $SNR=10dB$. 10 次运行之一的 $\hat{R}_e$ 的奇异值为

$$\sigma_{11}=113.99670,\ \sigma_{22}=105.89850,\ \sigma_{33}=5.33324,\ \sigma_{44}=3.53881$$
$$\sigma_{55}=1.05183,\ \cdots,\ \sigma_{15,15}=0.31021.$$

用 Cadzow 的 SVD 法定出 $p=4$.

表 1 列出了 AR 参数，$e(l)$ 及 $|e^{l+1}(l)|$ 各估值的统计量. 本文方法在 10 次运行中均给出 $q=2$ 的定阶结果.

从表中不难看出，仅利用 $\hat{e}(l)$ 不容易确定一个合适的 q，而使用 $|\hat{e}^{l+1}(l)|$ 却很容易准确定出 q. 众多例子表明，由于采用了 SVD 定 AR 阶数 p 以及用 SVD-TLS 法估计 AR 参数，使得 $|\hat{e}^{l+1}(l)|$ 当 $l>q$ 时非常接近于零，而且其离差非常小. 从而说明，本文提出的定阶方法对于较短的数据及较低的信噪比，在数值上是鲁棒的.

参 考 文 献

[1] Chow J. C. On estimating the orders of an autoregressive moving-average process with uncertain observations. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1972, **AC-17**, 707—709.

[2] Cadzow J A. Spectral estimation: An overdetermined rational model equation approach, Proc. IEEE, 1982, 70, 907—938.

[3] Zhang X D (张贤达) and Takeda H. An approach to time series analysis and ARMA spectral estimation, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 1987, **ASSP-35**, 1303—1313.

[4] Zhang, X D (张贤达). Estimation of frequencies of sinusoids in ARMA noise via singular value decomposition, Proc. IEEE Internat. Symp. Circuits and Systems, 1989, 1315—1318.

AN APPROACH TO MA ORDER DETERMINATION OF ARMA PROCESSES

ZHANG XIANDA

(Departhent of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

ABSTRACT

This paper proposes an approach to MA order identification of general ARMA models using sample autocorrelations and AR parameter estimates. In this approach, the order identification reduces to the rank determination of an upper triangular matrix, whereas it can be accomplished by using simpler computations. The simulation examples show that our approach has good statistical performances and is numerically robust.

Key words: system identification; ARMA model; order determination; SVD; total least squares.