

有界区域中带电平行线的无畸变场

吴庭竺

摘 要

本文为了解决不满足相似条件的矩形导电纸上带等量异号线电荷的平面调和场的畸变问题, 根据导电纸上稳定电场的导电纸与铜的边界线近似为等势线, 导电纸与空气的的边界线为电力线的特点, 选择原型场的边界由等势线与电力线混合组成。在进行物理模拟时使模型场满足相似条件, 就可以在有限区域上无畸变地模拟带电平行线场的电势分布。对具有相同复势的其它平面调和场, 只需另选合适的满足相似条件的有界区域, 就可实现该平面调和场的无畸变模拟。

实验测量带电系统周围的静电场时, 总是在有界的区域中进行的。由于有限边界上的电荷影响了场的分布, 使测量到的有界场的分布与理论上无界场的分布不相同。如果把有界场分布相对无界场分布的差异称为畸变, 则无界场是无畸变的场。那么, 在对有界场测量时, 如果边界电荷对场的影响没有消除, 那末就只能测量到畸变场而测量不到无畸变场。只有在有限边界处的电荷对场的影响消除之后, 才能够在这种有界区域中测量到无畸变场。显然, 这是一种边值问题, 有界区域上的场一定要满足适当的边界条件, 以消除边界处电荷对场的影响, 才可以实现无畸变场。

图1表示两条带等量异号线电荷密度的无限长平行线在充满各向同性线性均匀介质的无界区域中平面场的电势分布。图中虚线表示等势线, 实线表示电力线, 两者是相互正交的圆族。图2表示稳定电场描绘实验所测量到的等势线分布情况。实验是在矩形导电纸上安置两个位置对称、截面是圆形的正负电极A与B, 在导电纸平面上就形成一个带等量异号线电荷密度的平行线的有界平面稳定电场。实验测量到的这种稳定电场的电势分布是否可以模拟图1所示的无界平面场的电势分布呢? 从图2所示的测量结果来看, 等势线明显地不是圆形, 这说明矩形导电纸边界上电荷对场的影响, 使电势分布发生了严重畸变, 所以不能模拟图1所示的无界场。

本文讨论有界平面区域上模拟带电平行线无畸变场的原理和方法。首先, 讨论无界平面区域上带电平行线场的等势线族和电力线族、其次, 讨论一般平面调和场进行物理模拟的原理; 最后, 讨论有界区域中带电平行线场的无畸变物理模拟的方法。

本文于1982年7月6日收到

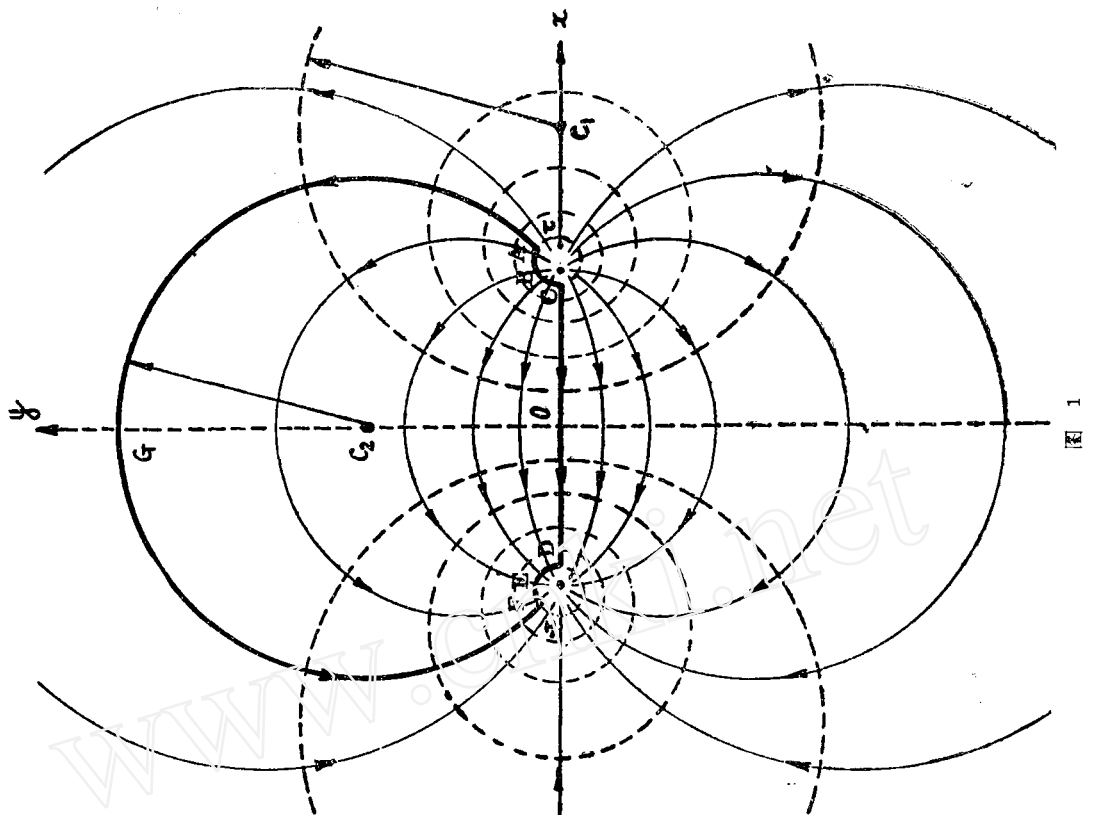


图 1

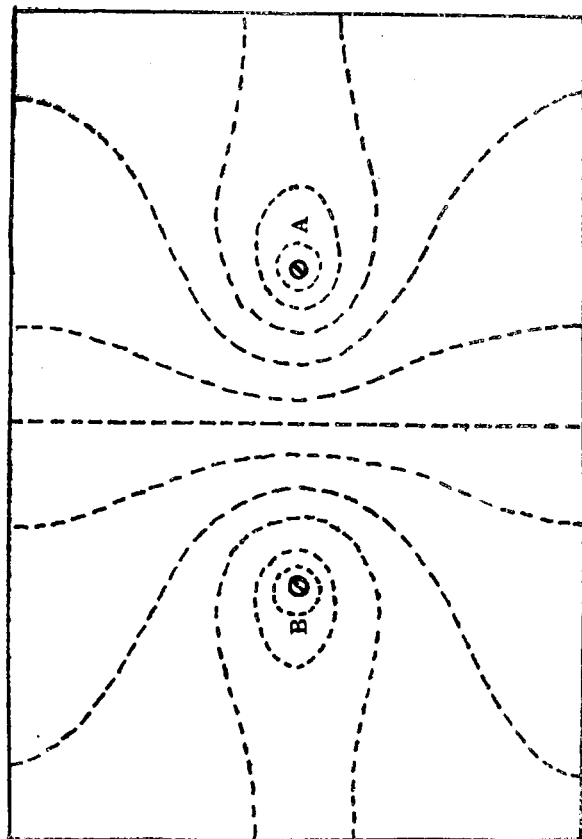


图 2

一、无界区域中带电平引线的场分布

我们先讨论带电平引线的等势线分布，然后再讨论电力线的分布。

(一) 等势线族

图 3 表示在充满介电常数为 ϵ 的各向同性线性均匀介质的无界空间中有两条相距 $2a$ 、带等量异号线电荷密度 τ 及 $-\tau$ 的无限长平行线。平行线与 xoy 平面正交，交点的坐标分别为 $(a, 0)$ 和 $(-a, 0)$ 。 xoy 平面上静电场的电势 $\varphi(x, y)$ 满足二维泊松方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{\tau}{\epsilon} [\delta(x-a, y) - \delta(x+a, y)] \quad (1)$$

及边界条件

$$\varphi(x, y)|_{\infty} = 0 \quad (2)$$

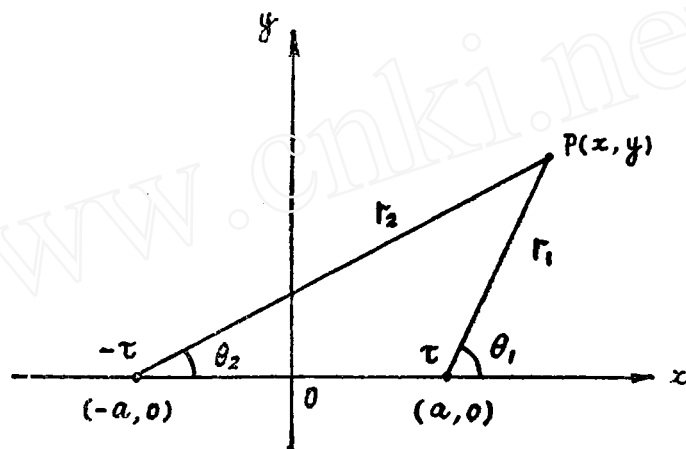


图 3

选择 oy 轴上电势也为零，则场点 $P(x, y)$ 满足泊松方程 (1) 式和边界条件 (2) 式的电势为

$$\varphi(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \quad (3)$$

式中 r_1 与 r_2 分别是场点 $P(x, y)$ 到正负线电荷 τ 与 $-\tau$ 的距离。等势线方程可表为

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = K \quad (4)$$

其中

$$K = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon}{\tau}\varphi\right) \quad (5)$$

电势 φ 的域为 $(-\infty, \infty)$ ，则 K 的域为 $(0, \infty)$ 。将 (4) 式左右平方，再经整理后可得

$$\left[x - \left(a + \frac{2a}{K^2 - 1}\right)\right]^2 + y^2 = \left(\frac{2K}{K^2 - 1}a\right)^2 \quad (6)$$

此式是以 K 为参量的圆族标准方程，圆族圆心 C_1 的座标为

$$\left(a + \frac{2a}{K^2 - 1}, 0\right) \quad (7)$$

其中圆心的横坐标也可表示为

$$S = a + \frac{2a}{K^2 - 1} = \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1} a$$

圆族的半径为

$$\rho = \left| \frac{2K}{K^2 - 1} a \right| \quad (8)$$

在 xoy 的右半平面, $\varphi > 0$, ($K > 1$), 电势为正。在 xoy 的左半平面, $\varphi < 0$, ($K < 1$), 电势为负。等势线圆族是把 y 轴包括在内的圆心在两线电荷外侧的 x 轴上、并对 x 轴和 y 轴都呈对称分布的不同半径不同心的圆族。图 1 中的虚线圆族就是无界带电平行线场的等势线族。

(二) 电力线族

为了求出与等势线族正交的电力线族的方程式, 可以先计算平面场的复势 $f(z)$, 其中 $z = x + iy$ 。若令复势的实部为电势 $\varphi(x, y)$, 则复势的虚部就是与电势共轭的流函数 $\psi(x, y)$, 流函数是常数的轨迹就是电力线。由于电势 φ 在不包括线电荷的整个平面上满足拉普拉斯方程, 所以电势 φ 是此域上的调和函数。我们可以从一个调和函数 φ 求出共轭的调和函数 ψ , 而后者就是流函数^[1]; 也可以用计算电通量的方法来求出流函数^{[2][3]}; 但是, 用先写出复势, 然后再得出流函数的方法就更为简便。为此, 我们先把电势改写成如下形式

$$\varphi(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{(x+a) + iy}{(x-a) + iy} \right| = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \left| \frac{z+a}{z-a} \right|$$

然后再取复势为

$$\begin{aligned} f(z) &= \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{z+a}{z-a} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{|z+a| e^{i\theta_2}}{|z-a| e^{i\theta_1}} \\ &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \left[\ln \left| \frac{z+a}{z-a} \right| + i(\theta_2 - \theta_1) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

其中复势的实部就是电势。根据静电场唯一性定理, 此复势同样唯一地描写同一由 (3) 式所决定的平面场。不难证明其虚部 ψ 与实部 φ 共轭[注]。所以流函数为

$$\psi(x, y) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} (\theta_2 - \theta_1)$$

其中 θ_1, θ_2 是 r_1, r_2 与 x 轴所成之角[见图(3)]。为了求出与等势线正交的电力线方程, 只需求流函数是常数的轨迹方程。当 $(\theta_2 - \theta_1)$ 的余切值为常数时, 就保证了流函数是常数。所以电力线方程可写成

$$\operatorname{ctg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1 + \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2 - \operatorname{tg}\theta_1} = -L$$

注意到 $\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{y}{x-a}$ 与 $\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{y}{x+a}$, 由上式可得

$$x^2 + (y - aL)^2 = a^2(L^2 + 1) \quad (10)$$

[注]: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \left(\frac{x+a}{r_2^2} - \frac{x-a}{r_1^2} \right)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) y$$

此式是以 L 为参量的圆族标准方程, 圆族圆心 C_0 的座标为

$$(0, \varepsilon L) \quad (11)$$

圆族的半径为

$$|a\sqrt{L^2+1}| \quad (12)$$

由于 τ 及 $-\tau$ 的座标 $(a, 0)$ 及 $(-a, 0)$ 同时满足 (10) 式。所以此圆族相交于两线电荷处。电力线是起始于 τ 终止于 $-\tau$ 的有始有终的圆弧。所以, 电力线圆族方程 (10) 给出了两个电力线圆弧族。电力线族是把 x 轴包括在内、与等势线族正交、圆心在 y 轴上、并对 x 轴及 y 轴都呈对称分布的始于 τ 终于 $-\tau$ 的不同心的圆弧族。图 1 中带箭头的实线圆弧就是与等势线族正交的电力线族。

二、平面调和场的物理模拟

在实验上可用存在稳定电流场的连续导电介质中的稳定电场来模拟待测电场。以下讨论平面调和稳定电场 (模型场) 模拟平面调和静电场 (原型场) 所需满足的相似条件 (电势相似、几何相似与边界相似) 问题。

把充满各向同性线性均匀电介质、并且无自由电荷分布的有界平面域 Ω 上的平面调和静电场称为原型场 (这是需要模拟的对象), 它的边界线由有限条等势线

$$f_i(x, y) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

和有限条电力线

$$g_j(x, y) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

混合组成。此 Ω 域上平面静电场的电势 $\varphi(x, y)$ 应满足二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

和混合边界条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi|_{f_i(x, y)=0} = \varphi_i (\text{常量}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{g_j(x, y)=0} = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$(15)$$

在另外一个有界平面域 Ω' 上与稳定电流场共存的平面稳定电场的电势用 $\Phi(X, Y)$ 表示, 使有界 Ω' 域上稳定电场中充满各向同性线性均匀介质、并且无自由电荷分布, 使 Ω' 域的边界线由有限条等势线

$$F_i(X, Y) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

和有限条电力线

$$G_j(X, Y) = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

混合组成。则此稳定电场必定也是一个平面调和场, 电势 $\Phi(X, Y)$ 应该满足二维拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} = 0 \quad (16)$$

和混合边界条件

$$\begin{cases} \Phi|_{F_i(x,y)=0} = \Phi_i \text{ (常数)} & (17) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{G_j(x,y)=0} = 0 & (18) \end{cases}$$

Ω 域上的静电场的电势 $\varphi(x, y)$ 由拉普拉斯方程 (13) 式和混合边界条件 (14)、(15) 式唯一确定; Ω' 域上的稳定电场的电势 $\Phi(X, Y)$ 由拉普拉斯方程 (16) 式和混合边界条件 (17)、(18) 式唯一确定。这两种调和场的电势虽然都满足拉普拉斯方程, 而且边界线都是由等势线和电力线混合组成, 但是 (13)、(14)、(15) 式与 (16)、(17)、(18) 式之间并没有建立对应关系, 所以 Ω' 域上电势的空间分布 $\Phi(X, Y)$ 与 Ω 域上电势的空间分布 $\varphi(x, y)$ 可以各不相同。为了建立两种场之间的对应关系, 使 Ω' 域上的平面调和稳定电场可作为模型场来模拟 Ω 域上的原型场, 就需使模型场满足下述的相似条件。

(一) 电势相似条件与几何相似条件

原型场的电势 φ 与模型场的电势 Φ 是相同性质的物理量, 但是它们的量值可以相等也可以不相等, 为了建立两者的联系, 令无量纲的比例常数

$$N = \frac{\varphi}{\Phi} \quad (19)$$

为了使比例常数不为零, 而且取有限值, 电势 φ 与 Φ 的零值点的选择方式必须一致。

原型场坐标的尺度与模型场坐标的尺度可以相等也可以不相等, 相应的坐标尺度的比例常数

$$N_1 = \frac{x}{X}, \quad N_2 = \frac{y}{Y} \quad (20)$$

为了使比例常数有限, 并且不为零, 两种坐标系的坐标轴必须重合。

把 (19) 式与 (20) 式代入 (16) 式, 得

$$\frac{N_1^2}{N} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{N_2^2}{N} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

将不为零的比例常数 N 消去之后, 可得

$$N_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + N_2^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (16-a)$$

由于此式中不包含比例常数 N , 所以要使 (16-a) 式与原型场电势方程 (13) 式相似, 首先, 两种场的电势的比例常数 N 可选不为零的任意有限值。把 N 称为电势相似常数, (19) 式称为电势相似条件, 则电势相似条件总是可以满足的。其次, 坐标尺度的比例常数须满足条件

$$N_1 = N_2 = N'$$

可见, 两种场的横坐标尺度间的比例常数 N_1 与纵坐标尺度间的比例常数 N_2 必须相等, 也就是模型场与原型场的空间尺度也须几何相似才能保证模型场电势的微分方程 (16) 式经过 (16-a) 式与原型场电势的微分方程 (13) 式相似。把比例常数 N' 称为几何相似常数^[4], (20) 式称为几何相似条件, 则几何相似常数可以选择不为零的任意有限值。

总之, 模型场满足电势相似条件和几何相似条件时, 模型场电势的微分方程就与原型场电势的微分方程相似。

(二) 边界相似条件

模型场等势线边界条件 (17) 式与原型场等势线边界条件 (14) 式都是等号右方为常量的第一类边界条件; 模型场电力线边界条件 (18) 式与原型场电力线边界条件 (15) 式都是齐次的第

二类边界条件。所以模型场的边界条件与原型场的边界条件在物理内容上是相同的。再根据几何相似条件，模型场的边界线当然也应该与原型场相应的边界线几何相似。所以，模型场边界条件(17)式中各边界等势线 $F_i(X, Y) = 0$ 必须以几何相似常数 N' 与原型场中各对应的边界等势线 $f_i(x, y) = 0$ 几何相似；模型场边界条件(18)式中各边界电力线 $G_i(X, Y) = 0$ 必须以同一几何相似常数 N' 与原型场中各对应的边界电力线 $g_i(x, y) = 0$ 几何相似。这就是各对应边界线必须满足的几何相似条件。把边界条件和边界线的几何相似条件合称为边界相似条件，则边界相似条件可表示为

$$\begin{cases} \Phi|_{F_i(X,Y)=0} = \Phi_i & (17) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{G_i(X,Y)=0} & (18) \\ F_i(X, Y) = 0 \sim f_i(x, y) = 0 & (17-20) \\ G_i(X, Y) = 0 \sim g_i(x, y) = 0 & (18-20) \end{cases}$$

再把电势相似条件(19)式、几何相似条件(20)式和边界相似条件(17)、(18)、(17-20)、(18-20)合称为相似条件。模型场在满足相似条件之后可使电势的微分方程和混合边界条件都与原型场相似，模型场与被模拟的原型场就建立了定量的对应关系。测定了满足相似条件的模型场的电势分布 $\Phi(X, Y)$ 之后，就可以根据预选的电势相似常数 N 与几何相似常数 N' 唯一地确定原型场的电势分布 $\varphi(x, y)$ 。在相似常数 $N = N' = 1$ 的特殊情况下，模型场的电势分布就与原型场的电势分布完全相同。

三、有界区域中带电平行线场的无畸变物理模拟

我们先讨论实验上使模型场满足相似条件的方法，然后讨论对模型场进行实验测量的问题。

根据模拟实验的特点，可先把图 1 所示无界带电平行线场中由半径都为 ρ_0 的等势线圆弧 ABC 与 DEF 以及电力线圆弧 AGF 与 COD 为边界围成的马蹄形有界均匀区域 Ω 中的平面调和场作为原型场，此场的电势 $\varphi(x, y)$ 满足拉普拉斯方程(13)式和边界条件(14)和(15)式。显然，满足方程和边界条件的解就是(3)式。若能模拟此有界 Ω 域上的场，就能无畸变地测量无界带电平行线场中有界 Ω 域上的电势分布了。无界场的其它各有界区域中的场也可用类似的方法测量。

(一) 模型场相似条件的实现方法

为了模拟无界带电平行线场中有界 Ω 域上的原型场的电势分布，模拟实验必须使模型场对于原型场满足相似条件。为此，可以把导电纸剪成图 4 所示的马蹄形，它的边缘 $-r'G'r'$ 是中心在 C'_2 、半径为 C'_2r' 的圆弧， $-r'O'r'$ 是一长度为 $2a'$ 的直线。将 OX 轴与直线 $-r'O'r'$ 重合， OY 轴与直线 $-r'O'r'$ 的垂直平分线重合，点 $-r'$ 与 r' 的坐标分别为 $(-a', 0)$ 与 $(a', 0)$ 。把马蹄形导电纸的左右两角用螺丝、螺母及半径为 ρ'_0 的铜垫圈紧固在绝缘板上，垫圈与导电纸在 XOY 平面上的分界线是半径为 ρ'_0 的圆弧 $A'B'C'$ 与 $D'E'F'$ ，这两个圆弧及导电纸其余的边缘线 $A'G'F'$ 与 $C'O'D'$ 围成一个马蹄形平面域 Ω' 。把右边的螺丝接直流电源的正极，左边的螺丝接负极，则在导电纸上就产生一个稳定电流场及共存的稳定电场。为了把 Ω' 域稳定电场作为模型场来模拟图 1 中无界带电平行线中有界 Ω 域上的原型

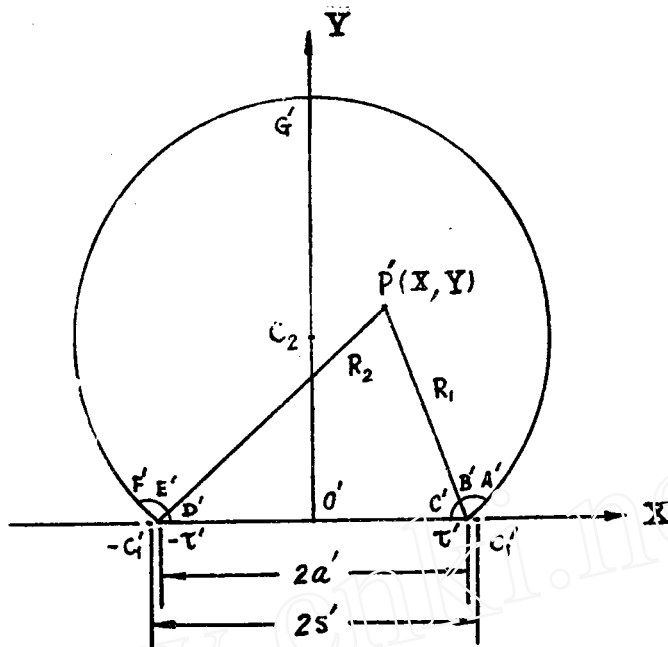


图 4

场, 可使模型场的圆弧边界 $A'B'C'$ 及 $D'E'F'$ 按适当的几何相似常数 N' 与由 (6)、(7)、(8) 式表示的原型场边界等势圆弧 ABC 及 DEF 几何相似。根据 (7) 式可知, 在马蹄形导电纸两角安装垫圈时, 需使垫圈中心在导电纸左右两角 $-\tau'$ 与 τ' 之外侧的 $(-S'_0, 0)$ 与 $(S'_0, 0)$ 处。其中 $S'_0 = a' + \frac{2a'}{K_+^2 - 1}$ 。 $K_+ = R_{2+}/R_{1+}$, R_{2+} 与 R_{1+} 分别是模型场等势线边界 $A'B'C'$

上一点到两线电荷的距离。由于 ρ'_0 选得远比 a' 为小, 所以 $\frac{2a'}{K_+^2 - 1} \cong \frac{\rho_0'^2}{2a'}$ 很小, 则 S'_0 就近似等于 a' , 可使垫圈中心放在线电荷外侧附近。原型场的电势 φ 在等势线边界 ABC 与 DEF 上满足边界条件 (14) 式, 可以证明与 ABC 及 DEF 几何相似的模型场边界圆弧 $A'B'C'$ 与 $D'E'F'$ 也是等势线 (见附录一)。所以, 导电纸上模型场的电势 Φ 满足边界相似条件 (17) 与 (17—20)。模型场边界线 $A'G'F'$ 与 $C'O'D'$ 按同一几何相似常数 N' 与图 1 所示由 (10)、(11)、(12) 式表示的原型场中电力线边界 AGF 与 COD 几何相似。原型场的电势 φ 在电力线边界 AGF 与 COD 上满足边界条件 (15) 式, 可以证明与 AGF 与 COD 几何相似的模型场边界线 $A'G'F'$ 与 $C'O'D'$ 也是电力线 (见附录一)。所以, 导电纸上模型场的电势 Φ 满足边界相似条件 (18) 与 (18—20)。由于均匀导电纸上模型场在电源之外, 并且无自由电荷分布, 所以模型场是平面调和场, 电势 Φ 满足拉普拉斯方程 (16) 式。选择适当的电势相似常数 N 就可建立模型场电势 Φ 与原型场电势 φ 的对应关系。

所以, 图 4 所示的马蹄形导电纸 Ω' 平面域上的平面调和模型场的电势满足相似条件, 模型场可无畸变地模拟原型场的电势分布。实验测量到模型场的电势分布 $\Phi(X, Y)$ 之后, 可按电势相似常数 N 与几何相似常数 N' 求出原型场的电势分布 $\varphi(x, y)$ 。

(二) 实验测量

先根据无界带电平行线场中有界 Ω 域的圆弧等势线边界的特性得出实验测量所适用的电

势表式, 然后根据实验与理论符合的事实说明满足相似条件的模型场可无畸变地在有界区域上模拟带电平行线的有界原型场, 再根据相似常数, 即可得出原型场的电势分布。

无界带电平行线有界 Ω 域上的电势分布由(3)式决定, 则圆弧等势线 ABC 上的电势

$$\varphi_+ = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{2+}}{r_{1+}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln K_+$$

常数 K_+ 是圆弧等势线 ABC 上任意一点到两带电线 $-\tau$ 与 τ 的距离 r_{2+} 与 r_{1+} 之比, 可见 $K_+ > 1$ 。由于得出电势表式(3)时已选择 y 轴上电势为零, 电势分布对 y 轴是正负对称的, 所以圆弧等势线 DEF 上的电势

$$\varphi_- = -\varphi_+ = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln K_+$$

等势线 ABC 与 DEF 的电势差

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{\tau}{\pi\epsilon} \ln K_+$$

由此可得

$$\frac{\tau}{\pi\epsilon} = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{\ln K_+} \quad (21)$$

根据(8)式, 等势线圆弧边界的半径为

$$\rho_0 = \frac{2K_+}{K_+^2 - 1} a \quad (22)$$

再根据(7)式, 两相同半径的等势边界圆弧中心间距之半为

$$S = \frac{K_+^2 + 1}{K_+^2 - 1} a \quad (23)$$

因为 $K_+ > 1$, 所以(21)、(22)、(23)式都为正。再联立(22)、(23)式, 可得

$$K_+ = \frac{S}{\rho_0} + \sqrt{\left(\frac{S}{\rho_0}\right)^2 - 1} \quad (24)$$

把(24)式代入(21)之后, 再代入(3)式, 即得

$$\varphi = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2 \ln \left[\frac{S}{\rho_0} + \sqrt{\left(\frac{S}{\rho_0}\right)^2 - 1} \right]} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (25)$$

其中 φ 与 $\ln \frac{r_2}{r_1}$ 的比例常数可以由任意一对同半径的等势线的电势差($\varphi_+ - \varphi_-$)、圆心距之半 S 和半径 ρ_0 确定。不限于选图1所示的等势线 ABC 及 DEF 。因为各对等势线都满足方程(25)式。在此电势表式中不出现电荷线密度和介质的介电常数, 对实验测量来说就比公式(3)的形式来得优越。因为电势差与长度是容易精确测量的物理量。进行物理模拟时, 满足相似条件的模型场的电势 Φ 也应采用与(25)式相似的形式。

根据以上的图4所示模型场的讨论可知, 图5所示的实验线路中, 马蹄形导电纸 Ω' 域上模型场满足相似条件。根据电势相似条件与几何相似条件可得

$$\Phi = \frac{\Phi_+ - \Phi_-}{2 \ln \left[\frac{S'}{\rho'_0} + \sqrt{\left(\frac{S'}{\rho'_0}\right)^2 + 1} \right]} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (26)$$

其中 Φ 与 $\ln \frac{R_2}{R_1}$ 的比例常数可以测量一对对称的等势线的电压 $(\Phi_+ - \Phi_-) = U$ 、等势线的圆心距之半 S' 和等势线半径 ρ_0' (不限于图 4 所示的 $A'B'C'$ 及 $D'E'F'$) 来求出。

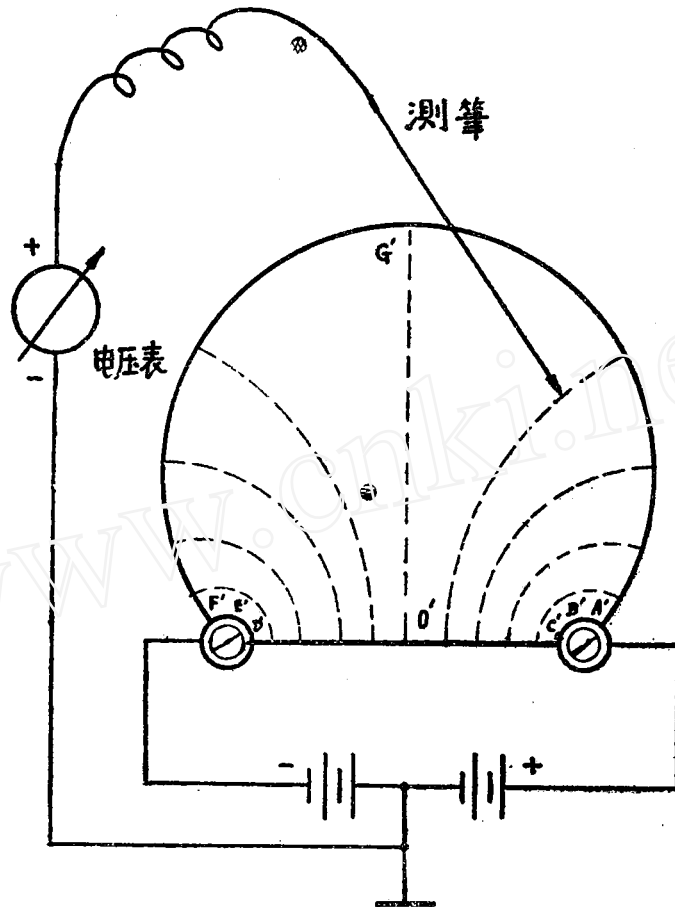


图 5

无界带电平行线场的电势分布 φ 与场点到两线电荷的距离之比的自然对数 $\ln \frac{r_2}{r_1}$ 成正比，等势线是不同心的圆族。图 2 所示矩形导电纸上的稳定电场并无相似条件与原型场相对应，在有限边界上的电荷影响之下场发生了畸变，所以实验测量结果表明电势分布与场点到两线电荷的距离之比的自然对数并无正比关系，等势线也不是圆弧。而图 5 所示马蹄形导电纸上的模型场与原型场间有相似条件相对应。实验测量结果表明，实验与理论符合得很好（见附录二），实验测量到的相同电势的场点所连成的等势线也都是不同心的圆弧。所以，实验事实证明证明了模型场的电势分布遵从(26)式，符合相似条件的马蹄形导电纸上的有界模型场是能够消除有限边界上电荷对场分布的影响，可以无畸变地模拟无界带电平行线场中有界区域上的电势分布。把测量到的模型场的电势分布，再按照预先选定的相似常数，就可以求出原型场的电势分布。

为了方便起见，可以选择相似常数 $N = N' = 1$ 在此特特情况下，模型场与原型场的电势

分布就是有界无畸变带电平行线场的电势分布。在绘制了一组不同心圆弧等势线之后,就可大致绘出一组与等势线圆弧正交的不同心的圆弧电力线。

最后应该指出,第一,上述有界区域边界的选择方法不是唯一的;第二,对于两带异号等量线电荷的同半径或不同半径的平行长直圆导线、离无限大导体平板为 a 的无限长带电线、偏心同轴电缆等带电体系的平面调和场,都具有与(9)式相同的复势。所以,这些场的等势线族方程和电力线族方程与公式(6)、(10)相同,这些场的分布都可在图1所示的场图中相应部分找到。所以,对上述满足相同复势的某种平面场,只需相应地选择满足相似条件的等势线和电力线作为有界区域的边界。就可实现在有界区域中对某种平面调和场的无畸变模拟。

[附录一]

将图4中的铜垫圈、导电纸和空气这三种各向同性线性均匀介质的电导率分别用 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 表示,它们内部的电流密度和电场强度分别用 \vec{j}_1 、 \vec{j}_2 、 \vec{j}_3 和 \vec{E}_1 、 \vec{E}_2 、 \vec{E}_3 表示

(1) 边界线 $A'B'C'$ 与 $D'E'F'$ 是等势线

在铜垫圈与导电纸的边界线 $A'B'C'$ 与 $D'E'F'$ 附近的电流密度的边界条件为

$$j_{1n} = j_{2n} \quad (27)$$

$$\frac{j_{1t}}{\sigma_1} = \frac{j_{2t}}{\sigma_2} \quad (28)$$

由于铜垫圈边缘附近的电流密度方向与半径方向不会偏离过大,所以 j_{1n} 与 j_{1t} 在数量级上不会有悬殊的差别,而导电纸材料的电导率远小于铜的电导率,即 $\sigma_2 \ll \sigma_1$ 。根据公式(28),可得 $j_{1t} \gg j_{2t}$ 。再根据公式(27)可知 $j_{2n} \gg j_{2t}$,所以 \vec{j}_2 与边界线近似垂直,稳定电场的场强 $\vec{E}_2 = \vec{j}_2/\sigma_2$ 当然也与边界垂直。所以边界线圆弧 $A'B'C'$ 与 $D'E'F'$ 是等势线。

(2) 边界线 $A'G'F'$ 与 $C'O'D'$ 是电力线

在导电纸与空气的边界线 $A'G'F'$ 与 $C'O'D'$ 附近的电流密度的边界条件之一为

$$j_{2n} = j_{3n} \quad (29)$$

由于空气的电导率 $\sigma_3 = 0$,而 \vec{E}_3 为有限值,所以根据欧姆定律可知 $\vec{j}_3 = \sigma_3 \vec{E}_3 = 0$ 。再由公式(29)可知 $j_{2n} = 0$ 。但是导电纸中的稳定电流密度 \vec{j}_2 不为零,所以边界附近导电纸中的电流必定沿边界线流动,即 $\vec{j}_2 = \vec{j}_{2t}$ 。边界线处稳定电场的场强 $\vec{E}_2 = \vec{j}_2/\sigma_2 = \vec{j}_{2t}/\sigma_2$ 的方向也是沿边界线的切线方向,所以边界线 $A'G'F'$ 与 $C'O'D'$ 是稳定电场的电力线。

[附录二]

测量时如图5采用双电源,调节到 y 轴上电势为零,使电势分布服从公式(26)。电势右正左负,其绝对值左右对称,令 $\beta_+ = R_2/R_1$; $\beta_- = R_1/R_2$,依次对应右半区及左半区。测量到的各等势线最近电力线边界 AGF 处的测点的数据如表1。

实验工作电压约 20V 左右。选择电势为 $\pm 5V$ 的一对等势线来确定 Φ 与 $\ln \frac{R_2}{R_1}$ 的比例常数,电压用 500 型万用表 10V 档 (2.5 级) 测,长度用毫米分度的钢皮尺。测得数据为

$$U = \Phi_+ - \Phi_- = 10 \pm 0.25 \text{ 伏}$$

$$\rho'_0 = 31.5 \pm 0.5 \text{ 毫米}$$

$$S' = 78 \pm 5.5 \text{ 毫米}$$

把场点的电势 Φ 作为宗标,则(26)式可表为

表 1

$\Phi(V)$	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00
$R_1(mm)$	190.0	149.0	105.0	71.0	50.5	33.5	24.5	17.5	12.5
$R_2(mm)$	190.0	205.0	196.0	183.5	174.0	165.0	158.5	154.5	151.0
$\Phi(V)$	0.00	-1.00	-2.00	-3.00	-4.00	-5.00	-6.00	-7.00	-8.00
$R_1(mm)$	190.0	205.5	199.0	187.0	174.0	166.0	160.0	155.0	152.0
$R_2(mm)$	190.0	155.5	113.5	76.0	50.0	34.5	25.5	18.0	13.0

$$\ln\beta = \frac{2}{U} \ln\left(\frac{S'}{\rho'_0} + \sqrt{\left(\frac{S'}{\rho'_0}\right)^2 - 1}\right) \Phi \quad (30)$$

把上列数据处理成表 2

表 2

$\Phi(V)$	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00
β_+	1.88	1.87	2.59	3.48	4.95	6.47	8.83	17.08
β_-	1.82	1.75	2.46	3.48	4.81	6.27	8.61	11.69
$\bar{\beta}$	1.85	1.81	2.53	3.48	4.87	6.37	8.72	11.89
$\ln\bar{\beta}$	0.900	0.593	0.928	1.247	1.583	1.852	2.166	2.483
$\Delta\bar{\beta}$	0.03	0.06	0.07	0.00	0.06	0.10	0.11	0.20
$\frac{\Delta\bar{\beta}}{\bar{\beta}}$	0.022	0.033	0.027	0.000	0.012	0.016	0.013	0.017

理论允许误差范围可先对 (30) 式求出相对误差表式

$$\frac{\delta\beta}{\beta} = \frac{2L}{U} \left(\Delta\Phi + \frac{\Delta U}{U} \Phi \right) + \frac{2}{U} \left[\left(\frac{1 + \frac{S'}{M}}{S' + \rho'_0 M} \right) \Delta S + \left(\frac{\rho'_0 + \frac{S'}{M}}{S' + \rho'_0 M} \right) \frac{S'}{\rho'^2_0} \Delta\rho'_0 \right] \quad (31)$$

其中

$$L = \ln\left(\frac{S'}{\rho'_0} + \sqrt{\left(\frac{S'}{\rho'_0}\right)^2 - 1}\right), \quad M = \sqrt{\left(\frac{S'}{\rho'_0}\right)^2 - 1}$$

代入数据得

$$\frac{\delta\beta}{\beta} = 0.0778 + 0.0349\Phi$$

经计算, 具体数据如表 3

表 3

$\Phi(V)$	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00
β_0	1.87	1.86	2.54	3.47	4.74	6.47	8.83	12.06
$\ln\beta_0$	0.315	0.621	0.932	1.244	1.556	1.867	2.178	2.490
$\frac{\delta\beta}{\beta}$	0.113	0.148	0.183	0.217	0.252	0.287	0.322	0.357
$\delta\beta$	0.15	0.28	0.34	0.75	1.19	1.86	2.84	4.31

把表 2 和表 3 的数据进行比较, 可知各测点的测量值都在理论规定的误差范围以内, 即满足关系式 $\beta_0 + \delta\beta > \bar{\beta} + \Delta\beta$ 和 $\beta_0 - \delta\beta < \bar{\beta} - \Delta\beta$ 。可见实验结果能和理论很好地符合。图 6 为 $\ln\beta \sim \Phi$ 图线, 直观地表示出实验与理论的符合情况。

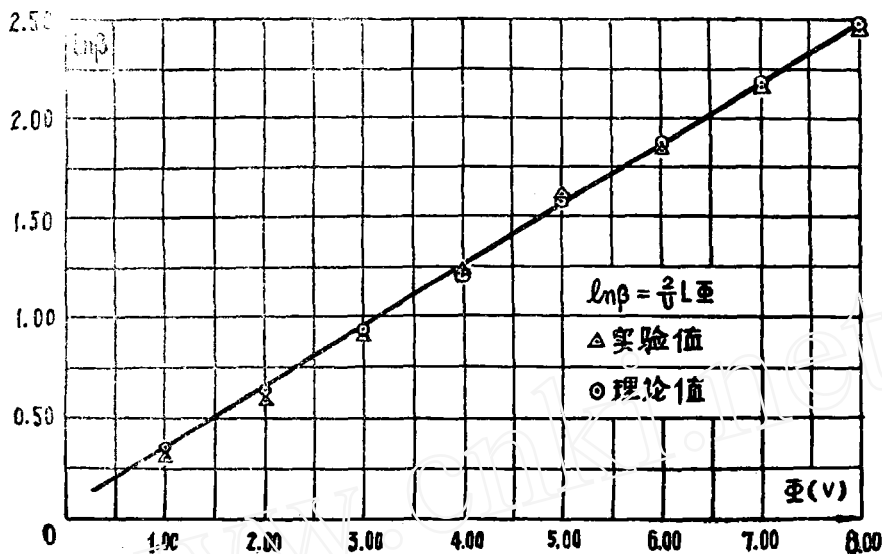


图 6

参 考 文 献

- [1] 郭敦仁, 数学物理方法, 2.4(1955)
- [2] W. B. Boast, Vector Fields, 7.06(1964)
- [3] Attwood, Electric and Magnetic Fields, 2.12 (1949)
- [4] 冯慈璋, 电磁场, §4—8 (1979)

The Distortionless Field of Parallel Charged Lines in the Bounded Region

Wu Tingzhu

Abstract

This article aims at solving the distortion problem concerning the plane-harmonic electric field which satisfies no analogous conditions and which is produced by two line charges with opposite in sign and same in quantity on a quadrate conducting paper.

According to the characteristics that in the stable field on the conducting paper the boundary lines between the paper and the copper are regarded as the equipotential contour approximatively and those lines between air and the paper as the field lines we can make choice of the boundary of the primary field in such way that this field consists of equipotentials and field lines complexly. On physical modelling we can simulate the potential distribution of the field of the parallel charged lines undistortedly in the bounded region if this model field satisfies a certain analogous condition.

As for other plane-harmonic fields with the same complex potential, we can also work out undistorted modelling of this field so long as we set up the bounded region in which certain analogous conditions are satisfied.