

弦圈系统的 Casimir 能量

陈莉¹, 陆继宗²

(1. 上海师范大学数理信息学院, 上海 200234; 2. 上海电机技术高等专科学校, 上海 200240)

摘要: Casimir 能量是量子场的一类零点能, 是由于边界的出现、时空的弯曲以及某些背景场的存在而引起的. 在此, 计算了各种不同闭弦体系的 Casimir 能量, 比较了不同弦圈体系的 Casimir 能量, 并讨论了一些有关的问题.

关键词: Casimir 能量; 闭弦; 多圈弦; 链接环

中图分类号: O413.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-5137(2004)02-0028-05

0 引言

对弦的 Casimir 能量的研究早在 90 年代初就开始了. BREVIK 和 NIELSEN 首先对分段均匀玻色闭弦作了详尽的研究^[1]. 他们当时是采用指数截断正规化法计算 Casimir 能量的. LI 等人发展了用广义黎曼 ζ 函数进行正规化的方法^[2]. 之后, Lu 和 Huang 应用广义黎曼 ζ 函数正规化法, 将分段均匀玻色闭弦的讨论推广到玻色子开弦、费米子弦和超弦^[3,4]. 我们也曾讨论了闭弦圈系统的 Casimir 能量^[5]. 本文, 将进一步讨论和比较各种不同的闭弦圈系统的 Casimir 能量, 以及由此而得到的一些推论.

1 独立多圈弦的 Casimir 能量

1.1 两个独立弦圈

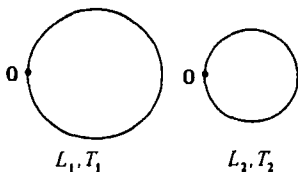


图1 两个独立环状弦

设两环长度为 L_1 和 L_2 , 张力为 T_1 和 T_2 , 密度为 ρ_1 和 ρ_2 , 如图 1 所示. 这里, 采用自然单位制 ($\hbar = c = 1$). ψ 满足波动方程:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\psi(\sigma, \tau) = 0.$$

收稿日期: 2003-07-02

作者简介: 陈莉(1979-), 女, 上海师范大学数理信息学院硕士研究生. 陆继宗(1941-), 男, 上海电机技术高等专科学校教授.

ψ 的一般形式为:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \xi_1 e^{i\omega(\sigma+\tau)} + \eta_1 e^{-i\omega(\sigma-\tau)}, \\ \psi_2 &= \xi_2 e^{i\omega(\sigma+\tau)} + \eta_2 e^{-i\omega(\sigma-\tau)},\end{aligned}$$

这里, 下标 1, 2 分别指环 1 和环 2, τ 和 σ 是时间和空间坐标. $(\sigma - \tau)$ 和 $(\sigma + \tau)$ 分别表示向右和向左传播.

连续性条件:

$$\begin{aligned}\psi_1|_{\sigma=0} &= \psi_1|_{\sigma=L_1}, \\ \psi_2|_{\sigma=0} &= \psi_2|_{\sigma=L_2},\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma}|_{\sigma=0} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma}|_{\sigma=L_1}, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma}|_{\sigma=0} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma}|_{\sigma=L_2},\end{aligned}$$

可得到两独立环状弦体系的色散方程:

$$\begin{aligned}\omega L_1 &= 1, \\ \omega L_2 &= 1.\end{aligned}\quad (1)$$

利用广义黎曼 ζ 函数正规化的方法[2], 得到两环体系的零点能为:

$$E_0^{loops} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right). \quad (2)$$

必须指出(2)式还不是真正的 Casimir 能量, 因为没有扣除两环均匀体系的零点能. 均匀体系的环总长度为 $L = L_1 + L_2$, 张力相等 $T_1 = T_2$, 此时的零点能为:

$$E_0^{uniform} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1 + L_2} \right). \quad (3)$$

(2)式减除零点能(3)式, 即得两独立环体系的 Casimir 能量:

$$E_{CE}^{loops} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1 + L_2} \right). \quad (4)$$

1.2 n 个独立环状弦体系

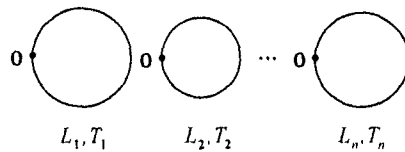


图 2 n 个独立弦图

设 n 个独立环的长度和张力分别为 $L_1, T_1; L_2, T_2; \dots; L_n, T_n$, 如图 2. 与(2)式相类似, n 个独立环状弦体系的零点能为:

$$E_0^{loops} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right). \quad (5)$$

均匀体系环的总长度为: $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$, 张力相等 $T_1 = T_2 = \dots = T_n$, 此时的零点能为:

$$E_0^{uniform} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} \right). \quad (6)$$

(5)式扣除(6)式, 即得 n 个独立环状弦体系的 Casimir 能量:

$$E_{CE}^{loops} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} - \frac{1}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} \right). \quad (7)$$

2 链接环的 Casimir 能量

由多个环状弦连接起来的体系叫做链接环. 首先讨论两个环状弦相连接的体系的 Casimir 能量.

2.1 两个链接环的 Casimir 能量

设一个由两段弦组成的封闭环, 两弦长度和张力分别为 $L_1, T_1; L_2, T_2$, 连接点在 0 和 L_1 处. 环上两点相互靠拢, 直至形成两个链接环, 如图 3 所示.

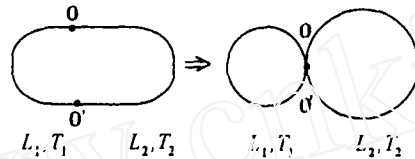


图 3 两段弦封闭环的变化

由连续性条件:

$$\begin{aligned} \psi_1|_{\sigma=0} = \psi_1|_{\sigma=L_1} = \psi_2|_{\sigma=L_1} = \psi_2|_{\sigma=L_1+L_2} = \psi_2|_{\sigma=0} = \psi_2|_{\sigma=L_2}, \\ T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma} |_{\sigma=0} = T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_1} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_1} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_1+L_2} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=0} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_2} \end{aligned}$$

可得到两个链接环体系的色散方程:

$$\omega L_1 = 1, \quad (8a)$$

$$\omega L_2 = 1, \quad (8b)$$

$$\omega (L_1 + L_2) = 1. \quad (8c)$$

该体系的零点能为:

$$E_0^{C_2-loops} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_1 + L_2} \right). \quad (9)$$

其中均匀弦的零点能为:

$$E_0^{uniform} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1 + L_2} \right). \quad (10)$$

(5)式扣除(eq6)式得两链接环体系的 Casimir 能量:

$$E_{CE}^{C_2-loops} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right). \quad (11)$$

从上式可以看出, 体系发生由图 3 所示的变化时, 将释放能量 $\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right)$. 也就是说, 图 3 右边图形的能量要比左边的能量低.

2.2 只有一个连接点的 n 个链接环的 Casimir 能量

接下来讨论只有一个连接点的 n 个环状弦相连接的情况. 设 n 个链接环的长度和张力分别为 $L_1, T_1; L_2, T_2; \dots; L_n, T_n$, 如图 4 所示. 与(9)式相类似, n 个环状弦体系的零点能为:

$$E_0^{C_n-loops} = -\frac{\pi}{6} \left(\sum_i \frac{1}{L_i} + \sum_{i < j} \frac{1}{L_i + L_j} + \dots + \sum_{i < j < \dots < l} \frac{1}{L_i + L_j + \dots + L_l} + \frac{1}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} \right), \quad (12)$$

其中均匀弦的零点能为:

$$E_0^{uniform} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1 + L_2 + \dots + L_n} \right). \quad (13)$$

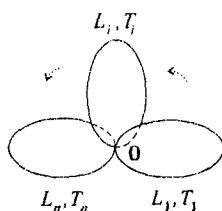


图 4 一个连接点的 n 个链接环

(12)式扣除(13)式得 n 个链接环的 Casimir 能量为:

$$E_{\text{Cas}}^{C-\text{loops}} = -\frac{\pi}{6} \left(\sum_i^n \frac{1}{L_i} + \sum_{i < j}^n \frac{1}{L_i + L_j} + \dots + \sum_{i < j < \dots < l}^n \frac{1}{L_i + L_j + \dots + L_l} \right). \quad (14)$$

2.3 有 $(n-1)$ 个连接点的 n 个链接环的 Casimir 能量

最后讨论有 $(n-1)$ 个连接点的 n 个环状弦相连接的情况. 设一个由 $2(n-1)$ 段弦组成的封闭环, 有 $2(n-1)$ 个连接点. 环上各对应点相互靠拢, 直至形成 n 个链接环. 本文考虑 4 段均匀弦形变为 3 个环的情况, 如图 5 所示. 由连续性条件:

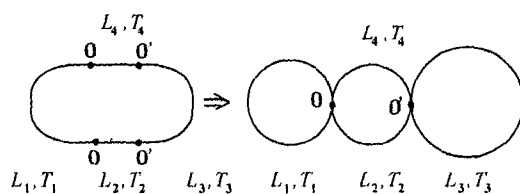


图 5 $(n-1)$ 个连接点的环状弦的变化

$$\begin{aligned} \psi_1|_{\sigma=0} &= \psi_1|_{\sigma=L_1} = \psi_2|_{\sigma=L_1} = \psi_2|_{\sigma=0} = \psi_2|_{\sigma=L_2+L_4} \\ &= \psi_2|_{\sigma=L_2+L_3+L_4} = \psi_2|_{\sigma=L_1+L_2+L_4} = \psi_2|_{\sigma=L_1+L_2+L_3+L_4} \\ T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma} |_{\sigma=0} &= T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_1} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_1} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=0} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_2+L_4} \\ &= T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_2+L_3+L_4} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_1+L_2+L_4} = T_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_1+L_2+L_3+L_4} \end{aligned}$$

$$\psi_2|_{\sigma=L_2} = \psi_2|_{\sigma=L_1+L_2} = \psi_3|_{\sigma=L_2+L_3} = \psi_3|_{\sigma=L_1+L_2+L_3}$$

和

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_2} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_1+L_2} = \frac{\partial \psi_3}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_2+L_3} = \frac{\partial \psi_3}{\partial \sigma} |_{\sigma=L_1+L_2+L_3}$$

由此可得到 3 链接环体系的色散方程:

$$\begin{aligned} \cos \omega L_1 &= 1, \cos \omega L_3 = 1, \cos \omega (L_2 + L_4) = 1, \cos \omega (L_1 + L_3) = 1, \\ \cos \omega (L_1 + L_2 + L_3) &= 1, \cos \omega (L_2 + L_3 + L_4) = 1, \\ \cos \omega (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) &= 1. \end{aligned} \quad (15)$$

体系的零点能为:

$$\begin{aligned} E_0^{3L-\text{chain}} &= -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_2 + L_4} + \frac{1}{L_1 + L_3} + \frac{1}{L_1 + L_2 + L_3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{L_2 + L_3 + L_4} + \frac{1}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

其中均匀弦的零点能为

$$E_0^{uniform} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1 + L_2 + L_3 + L_4} \right). \quad (17)$$

(eq16)式扣除(17)式得3链接环体系的Casimir能量:

$$E_{CE}^{3-chain} = -\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_2 + L_4} + \frac{1}{L_1 + L_3} + \frac{1}{L_1 + L_2 + L_3} + \frac{1}{L_2 + L_3 + L_4} \right), \quad (18)$$

从上式可以看出,由图5所示的4段均匀弦变化为3个环时,将释放能量:

$$\frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_2 + L_4} + \frac{1}{L_1 + L_3} + \frac{1}{L_1 + L_2 + L_3} + \frac{1}{L_2 + L_3 + L_4} \right). \quad (19)$$

由此可见,图5右边图形的能量要比左边的能量低.

上面利用广义黎曼 ζ 函数计算了各种不同闭弦体系的Casimir能量.发现无论是多圈弦还是链接环,它们的Casimir能量都是负值并且要比一个大的闭环的Casimir能量低.如将此结论应用到宇宙弦的研究中去,则因多圈弦、链接环的Casimir能量较低,故一个大的宇宙弦圈将会变为以链接环或独立多圈弦形式存在.这将有助于大爆炸宇宙学中星系形成问题的解决.

参考文献:

- [1] BREVIK I, NIELSEN H B. Casimir energy for a piecewise uniform string[J]. Phys Rev D, 1990, 41:1185-1192.
- [2] LI X Z, SHI X, ZHANG J Z. Generalized Riemann ζ -function regularization and Casimir energy for a piecewise uniform string[J]. Phys Rev D, 1991, 44:560-562.
- [3] LU J Z, HUANG B F. Casimir energy for a piecewise uniform Green-Schwarz superstring[J]. Phys Rev D, 1998, 57: 5280-5283.
- [4] LU J Z, HUANG B F. Casimir energy for twisted piecewise uniform bosonic strings[J]. Nuovo Cimento A, 1998, 111: 1337-1347.
- [5] 陈莉, 陆继宗. 闭弦变形和Casimir能量[J]. 济南: 山东科技大学学报(自然科学版), 2003, 22:32-34.

Casimir energy for string loop systems

CHEN Li¹, LU Ji-zong²

- (1. Mathematics and Sciences College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China;
2. Shanghai College of Electricity Machinery Technology, Shanghai 200240, China)

Abstract: The Casimir energy is a kind of zero-point energy of quantized fields and can be considered as the energy of vacuum polarization of quantized fields due to the presence of boundaries, the curvature of the space-time manifold or some background fields. In this paper, the Casimir energy for various string loop systems is calculated. Results of different systems are compared and some related topics are discussed.

Key words: Casimir energy; closed bosonic string; multiloop strings; connected string loops