第25卷 第1期　　上海师范大学学报(自然科学版)　　Vol. 25, No. 1
1996年3月　　J. of Shanghai Teachers Univ. (Natural Sciences)　　Mar., 1996

一类变系数Stieltjes微分系统解的稳定性

金　均

提　要　研究了几种变系数或缓变系数的Stieltjes微分系统解的稳定性，得到了保证这些系统平衡态指数渐近稳定的充分条件．

关键词　Stieltjes微分系统；存在唯一性；指数渐近稳定性

中图法分类号　O175.1

0　引　言

所谓Stieltjes微分系统，是指形如

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}m(t)}=f(t,x(t)) \tag{1}$$

的微分系统，这里$m(t)$为单调渐增连续函数，也可以取连续有界变差函数．对于$x(t)$，$m(t)$，可以定义Stieltjes微分为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}m(t)}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{m(t+\Delta t)-m(t)}.$$

通常的微分可以看作当$m(t)=t$时的特例．

对于线性高阶常系数Stieltjes方程

$$\frac{\mathrm{d}^n x(t)}{\mathrm{d}^n m(t)}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x(t)}{\mathrm{d}^{n-1}m(t)}+\cdots+a_n x(t)=0, \tag{2}$$

有形如$e^{\lambda m(t)}$的解的充分必要条件λ是(2)的特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{3}$$

的根．因为把$e^{\lambda m(t)}$代入(2)，得

$$(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)e^{\lambda m(t)}=0,$$

由此式即得(3)，反之亦然．同样，对于常系数一阶线性Stieltjes方程组

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}m(t)}=A\vec{x}(t), \tag{4}$$

其中$A_{n\times n}$是常数矩阵，$\vec{x}(t)\in \mathbf{R}^n$，容易证明它有形如$\vec{x}(t)=\vec{c}e^{\lambda m(t)}$的解的充分必要条件是$\lambda$是$A$的特征方程

收稿日期：1993-05-23

作者金均，男，教授，上海师范大学数学系，上海，200234

$$\det(A-\lambda I)=0 \tag{5}$$

的根，$\vec{c}$ 是对应于 λ 的特征向量．显然，(4)满足初值条件 $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ 的解可表为

$$\vec{x}(t)=e^{(m(t)-m(t_0))A}\vec{x}_0.$$

本文主要研究一类变系数或缓变系数 Stieltjes 微分系统解的稳定性．这类系统的稳定性研究在国内外很少见到，文[4]作了初步的研究．这个领域的研究还有待于深入．

为了后面的需要，先证明下面的两条定理．

定理 1 设 $a(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是 Riemann Stieltjes 可积，且 $a(t)\geqslant 0$，$u(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足不等式

$$u(t)\leqslant \mathrm{b}+\int_0^t a(s)u(s)\mathrm{d}m(s) \quad (\mathrm{b}\ 为常数) \tag{6}$$

则

$$u(t)\leqslant \mathrm{b}e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}. \tag{7}$$

证明 令 $H(t)=\int_0^t a(s)u(s)\mathrm{d}m(s)$，则

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}m(t)}=a(t)u(t)\leqslant a(t)\mathrm{b}+a(t)H(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m(t)}\left(H(t)e^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}\right)=\frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}m(t)}e^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}-H(t)a(t)e^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}\leqslant$$

$$(a(t)\mathrm{b}+a(t)H(t))e^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}-H(t)a(t)e^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}=-\mathrm{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m(t)}e^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)},$$

对上述不等式，两边积分，即得

$$H(t)e^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}\leqslant-\mathrm{b}\int_0^t \mathrm{d}e^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}=\mathrm{b}-\mathrm{b}e^{-\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)},$$

$$H(t)\leqslant \mathrm{b}e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}-\mathrm{b}$$

所以，$u(t)\leqslant \mathrm{b}+H(t)=\mathrm{b}e^{\int_0^t a(s)\mathrm{d}m(s)}$． □

定理 2 设 Stieltjes 系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}m(t)}=\vec{f}(t,\vec{x}(t)),\\ \vec{x}(t_0)=\vec{x}_0,\end{cases} \tag{8}$$

其中 $\vec{x}(t),\vec{f}(t,\vec{x})\in \mathrm{R}^n$，$t\in[0,+\infty)$，如果 $\vec{f}(t,\vec{x})$ 满足

1) 在 R^{n+1} 中某个容许区域 D 内连续；

2) 满足 Lipschitz 条件：

$$\exists\ \mathrm{K}>0,\ \forall\ (t,\vec{x}),(t,\vec{y})\in D\Rightarrow\|\vec{f}(t,\vec{x})-\vec{f}(t,\vec{y})\|\leqslant \mathrm{K}\|\vec{x}-\vec{y}\|;$$

3) $m(t)$ 为具有连续全变差的有界变差函数，则初值问题(8)的解存在唯一．

证明 先证存在性．由(8)得 $\mathrm{d}\vec{x}(t)=\vec{f}(t,\vec{x})\mathrm{d}m(t)$，两边积分得

$$\vec{x}(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^t \vec{f}(t,\vec{x})\mathrm{d}m(t). \tag{9}$$

这里 $\vec{x}(t)$ 是连续函数．引进非线性积分算子 L，把(9)改写为

$$\mathrm{L}[\vec{x}]=\vec{x}_0+\int_{t_0}^t \vec{f}(t,\vec{x})\mathrm{d}m(t)(=\vec{x}(t)).$$

利用Banach不动点原理来证明解的存在性．取范数 $\|\vec{x}(t)\| = \max\limits_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}$，任取 $(t,\vec{x}_1),(t,\vec{x}_2)\in D$，作：

$$\|\mathrm{L}[\vec{x}_1]-\mathrm{L}[\vec{x}_2]\| = \left\|\int_{t_0}^{t}\vec{f}(t,\vec{x}_1)\mathrm{d}m(t)-\int_{t_0}^{t}\vec{f}(t,\vec{x}_2)\mathrm{d}m(t)\right\| \leqslant$$

$$\int_{t_0}^{t}\mathrm{K}\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|\,|\mathrm{d}m(t)| \leqslant \mathrm{K}\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|\bigvee_{t_0}^{t}(m(t)) =$$

$$\mathrm{K}\delta_1\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\|.$$

这里 $\delta_1 \triangleq \bigvee\limits_{t_0}^{t}(m(t))$，即 $m(t)$ 的全变差，而 $t\in[t_0,t_1]$，$t-t_0<\delta$. 因为 $m(t)$ 是连续全变差函数，所以当 δ 充分小时，可使 $\mathrm{K}\delta_1<1$. 所以 $\mathrm{L}[\vec{x}]$ 满足Banach不动点原理．所以(8)的解存在．

现证唯一性．显然微分初值系统(8)与积分系统(9)是等价的．证(9)的解是唯一的．设 $\vec{u}(t)$，$\vec{v}(t)$ 是(9)的两个不同的解，则

$$\vec{u}(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(t,\vec{u}(t))\mathrm{d}m(t), \tag{10}$$

$$\vec{v}(t)=\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{f}(t,\vec{v}(t))\mathrm{d}m(t), \tag{11}$$

由(10)(11)得

$$\|\vec{u}(t)-\vec{v}(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t}\mathrm{K}\|\vec{u}(t)-\vec{v}(t)\|\,|\mathrm{d}m(t)|,$$

由定理1得

$$0\leqslant\|\vec{u}(t)-\vec{v}(t)\|\leqslant 0\cdot e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{K}|\mathrm{d}m(t)|}=0$$

所以 $\vec{u}(t)\equiv\vec{v}(t)$，唯一性证毕． □

下面对系统(8)引进稳定性概念．设 $\vec{f}(t,\vec{0})=\vec{0}$.

定义1 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$，使得当 $\|\vec{x}_0\|<\delta$ 时，初值问题(8)的解 $\|\vec{x}(t,\vec{x}_0,t_0)\|<\varepsilon$，对 $t\geqslant t_0$ 均成立，则称(8)的零解是稳定的．

定义2 如果(8)的零解是稳定的，且 $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{x}(t,\vec{x}_0,t_0)=0$，则称零解为渐近稳定的．

定义3 称(8)的零解是指数渐近稳定的，如果存在 $\alpha>0$，对任意给定的 $\mathrm{M}>0$，存在 $\delta=\delta(\mathrm{M})>0$ 使得当 $\|\vec{x}_0\|<\delta$ 时有 $\|\vec{x}(t,\vec{x}_0,t_0)\|<\mathrm{M}e^{-\alpha(m(t)-m(t_0))}$.

在上述3个定义中，如果 δ 可以任意大，则称(8)的零解是全局性稳定的．

1 一类变系数Stieltjes微分系统解的稳定性

考虑系统

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}m(t)}=(A+B(t))\vec{x}(t), \tag{12}$$

这里 A 是 $n\times n$ 的常数矩阵，$B(t)$ 是 $n\times n$ 连续函数矩阵，$m(t)$ 是递增连续函数，当 $t>0$ 时，

$m(t)>0$, 且 $m(0)=0$.

定理 3 如果系统(12)满足

1) $\dfrac{d\vec{x}(t)}{dm(t)}=A\vec{x}(t)$ (13)

的零解是渐近稳定的;

2) $\int_{t_0}^{t}\|B(t)\|dm(t)\leqslant\dfrac{1}{2K}\alpha(m(t)-m(t_0))$, (这里 K, α 为适当的两个常数)则(12)的零解是全局指数渐近稳定的.

证明 系统(12)满足初值 $\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$ 的解为

$$\vec{x}(t)=e^{A(m(t)-m(t_0))}\vec{x}_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(m(t)-m(s))}B(s)\vec{x}(s)dm(s),$$

(这里总假定 $t\geqslant t_0$). 因为(13)的零解是渐近稳定的,所以 A 的特征根均有负实部,因此存在 $\alpha>0$, $K>0$, 使得

$$\|e^{A(m(t)-m(t_0))}\|\leqslant Ke^{-\alpha(m(t)-m(t_0))},$$

这样,我们得到

$$\|\vec{x}(t)\|\leqslant K\|\vec{x}_0\|e^{-\alpha(m(t)-m(t_0))}+K\int_{t_0}^{t}e^{-\alpha(m(t)-m(s))}\|B(s)\|\,\|\vec{x}(s)\|dm(s), \tag{14}$$

不等式(14)两端同乘 $e^{\alpha m(t)}$, 得

$$e^{\alpha m(t)}\|\vec{x}(t)\|\leqslant K\|\vec{x}_0\|e^{\alpha m(t_0)}+K\int_{t_0}^{t}e^{\alpha m(s)}\|\vec{x}(s)\|\,\|B(s)\|dm(s).$$

由定理 1, 得

$$e^{\alpha m(t)}\|\vec{x}(t)\|\leqslant K\|\vec{x}_0\|e^{\alpha m(t_0)}\cdot e^{K\int_{t_0}^{t}\|B(s)\|dm(s)},$$

即

$$\|\vec{x}(t)\|\leqslant K\|\vec{x}_0\|e^{\alpha(m(t)-m(t_0))+K\int_{t_0}^{t}\|B(s)\|dm(s)},$$

由条件 2), 即得

$$\|\vec{x}(t)\|\leqslant K\|\vec{x}_0\|e^{-\frac{\alpha}{2}(m(t)-m(t_0))}.$$

因为 $m(t)$ 是递增的正连续函数,所以由定义即得系统(12)的零解是指数渐近稳定的,因为它是线性系统,所以是全局指数渐近稳定的. □

现在研究系统

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dm(t)}=(A_0(m(t))^n+A_1(m(t))^{n-1}+\cdots+A_{n-1}m(t)+A_n)\vec{x}(t), \tag{15}$$

其中 A_i 为 $n\times n$ 的常数矩阵. 对(15)作变换

$$p(t)=\frac{1}{n+1}(m(t))^{n+1}, \text{即 } m(t)=((n+1)p(t))^{\frac{1}{n+1}}, \tag{16}$$

因为 $m(t)$ 是单调上升的正函数,所以 $p(t)$ 也是单调上升的正函数,又因为

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dm(t)}=\frac{d\vec{x}(t)}{dp(t)}\cdot\frac{dp(t)}{dm(t)}=\frac{d\vec{x}(t)}{dp(t)}(m(t))^n, \tag{17}$$

把(16)(17)代入(15)得

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dp(t)}=(A_0+A_1((n+1)p(t))^{-\frac{1}{n+1}}+\cdots+A_n((n+1)p(t))^{-\frac{n}{n+1}})\vec{x}(t), \tag{18}$$

令

$$B(t) = A_1((n+1)p(t))^{-\frac{1}{n+1}} + \cdots + A_n((n+1)p(t))^{-\frac{n}{n+1}}, \tag{19}$$

则 (18) 可化为

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dp(t)} = (A_0 + B(t))\vec{x}(t). \tag{20}$$

显然系统(15)与系统(20)有相同的稳定性态．于是得到

定理 4　如果(20)满足

1) $\frac{d\vec{x}(t)}{dp(t)} = A_0\vec{x}(t)$ 的零解是渐近稳定的；

2) 由 (19) 定义的 $B(t)$ 满足 $\int_{t_0}^{t} \| B(t) \| dp(t) \leqslant \frac{\alpha}{2K}(p(t) - p(t_0))$，则(20)的零解是指数渐近稳定的，亦即系统(15)的零解是全局指数渐近稳定的．

2　一类缓变系数 Stieltjes 微分系统解的稳定性

在上一节中考虑的变系数系统，它的系数矩阵可分解成 $A + B(t)$ 的形式，由于紧紧地抓住了常数矩阵 A，把问题变得简单了．但对一般的变系数微分系统

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dm(t)} = A(t)\vec{x}(t) \tag{21}$$

未必都能拆成 $A + B(t)$ 的形式，所以不能简单地用上一节的方法来处理，那么能否象常系数系统一样，利用 $A(t)$ 的特征根的符号来判别其零解的稳定性呢？答案也是否定的，有很多反例可以说明这一点．它们的特征根均具负实部，但零解是不稳定的．然而是否可以设想，$A(t)$ 虽是 t 的函数，随 t 的变化而变化，但变化不大，即 $A(t)$ 是缓变函数矩阵，这时能否用 $A(t)$ 的特征根来研究其零解的稳定性呢？对于这个问题，可以采用"冻结系数法"来解决，当然要做到这一点，还必须补充一些附加条件．对系统(21)，可有如下的定理．

定理 5　如果系统(21)满足

1) 广义特征方程 $\det(A(t) - \lambda I) = 0$ 的所有根 $\lambda_i = \lambda_i(t)$ 均有负实部，即 $\mathrm{Re}\lambda_i(t) < -\delta < 0, i = 1, \cdots, n$；

2) 对任意 $t_0 \in [0, +\infty)$，存在 $r > 0$，使对一切 $t \geqslant t_0$，均有 $\| A(t) - A(t_0) \| \leqslant r$

3) 存在常数 M，满足 $2Mr < \delta$

则系统(21)的零解是全局指数渐近稳定的．

证明　把 (21)改写成

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dm(t)} = A(t_0)\vec{x}(t) + (A(t) - A(t_0))\vec{x}(t), \tag{22}$$

其中 $A(t_0)$ 为常数矩阵，t_0 是 $[0, +\infty)$ 中的某一点．(22)满足初值 $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ 的解可表为

$$\vec{x}(t) = e^{A(t_0)(m(t)-m(t_0))}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0)(m(t)-m(s))}(A(s) - A(t_0))\vec{x}(s)dm(s), \tag{23}$$

对(23)两边取范数：

$$\| \vec{x}(t) \| \leqslant \| e^{A(t_0)(m(t)-m(t_0))} \| \, \| \vec{x}_0 \| +$$

$$\int_{t_0}^{t}\|e^{A(t_0)(m(t)-m(s))}\|\cdot\|A(s)-A(t_0)\|\ \|\ \|\vec{x}(s)\|\mathrm{d}m(s),$$

由条件1),$A(t_0)$的特征根均有负实部,所以存在$M>0$及$\delta>0$,使当$t\geqslant s$时有

$$\|e^{A(t_0)(m(t)-m(t_0))}\|\leqslant Me^{-\frac{\delta}{2}(m(t)-m(t_0))},$$

又结合条件2),得到

$$\|\vec{x}(t)\|\leqslant Me^{-\frac{\delta}{2}(m(t)-m(t_0))}\|\vec{x}_0\|+\int_{t_0}^{t}rMe^{-\frac{\delta}{2}(m(t)-m(s))}\|\vec{x}(s)\|\mathrm{d}m(s)\}$$

即

$$\|\vec{x}(t)\|e^{\frac{\delta}{2}m(t)}\leqslant Me^{\frac{\delta}{2}m(t_0)}\|\vec{x}_0\|+\int_{t_0}^{t}rMe^{\frac{\delta}{2}m(s)}\|\vec{x}(s)\|\mathrm{d}m(s),$$

由定理1,得

$$\|\vec{x}(t)\|e^{\frac{\delta}{2}m(t)}\leqslant M\|\vec{x}_0\|e^{\frac{\delta}{2}m(t_0)}\cdot e^{\int_{t_0}^{t}rM\mathrm{d}m(s)}=$$

$$M\|\vec{x}_0\|e^{\frac{\delta}{2}m(t_0)+rM(m(t)-m(t_0))}.$$

$$\|\vec{x}\|\leqslant M\|\vec{x}_0\|e^{-\frac{\delta}{2}(m(t)-m(t_0))+rM(m(t)-m(t_0))}=$$

$$M\|\vec{x}_0\|e^{(-\frac{\delta}{2}+rM)(m(t)-m(t_0))}.$$

由条件3)及定义3,知道系统(21)的零解是指数渐近稳定的,而且是全局指数渐近稳定.

□

3 一类非线性Stieltjes微分系统的稳定性

现在考虑一类比较特殊的非线性系统:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}m(t)}=A\vec{x}(t)+\vec{f}(t,\vec{x}),\tag{24}$$

这里A是$n\times n$常数矩阵,$\vec{f}(t,0)=0$.

定理6 如果(24)满足

1) $\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}m(t)}=A\vec{x}(t)$的零解是渐近稳定的;

2) $\lim\limits_{\|\vec{x}\|\to 0}\frac{\|\vec{f}(t,\vec{x})\|}{\|\vec{x}\|}=0$;

3) $\vec{f}(t,\vec{x})$在R^{n+1}中的某一邻域内连续,且满足Lip条件,则(24)的零解是指数渐近稳定的.

证明 系统(24)满足初值$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$的解可表为

$$\vec{x}(t)=e^{A(m(t)-m(t_0))}\|\vec{x}_0\|+\int_{t_0}^{t}e^{A(m(t)-m(s))}\vec{f}(s,\vec{x}(s))\mathrm{d}m(s),$$

因为$\frac{\mathrm{d}\vec{x}(t)}{\mathrm{d}m(t)}=A\vec{x}(t)$的零解是渐近稳定的,所以$A$的所有特征值均具有负实部,存在$\alpha>0$,$K>0$,使

$$\|e^{A(m(t)-m(t_0))}\|\leqslant Ke^{-\alpha(m(t)-m(t_0))},$$

所以

$$\|\vec{x}(t)\| \leqslant Ke^{-a(m(t)-m(t_0))}\|\vec{x}_0\| + K\int_{t_0}^{t} e^{-a(m(t)-m(s))}\|\vec{f}(s,\vec{x}(s))\|\mathrm{d}m(s).$$

根据条件2)，对$\frac{a}{2K}$，存在$\varepsilon>0$，使得在$\|\vec{x}(t)\|<\varepsilon$时有$\|\vec{f}(t,\vec{x})\|\leqslant\frac{a}{2K}\|\vec{x}(t)\|$．上述不等式可改写为

$$\|\vec{x}(t)\| \leqslant Ke^{-a(m(t)-m(t_0))}\|\vec{x}_0\| + \frac{a}{2}\int_{t_0}^{t} e^{-a(m(t)-m(t_0))}\|\vec{x}(s)\|\mathrm{d}m(s),$$

$$\therefore\ \|\vec{x}(t)\|e^{am(t)} \leqslant Ke^{am(t_0)}\|\vec{x}_0\| + \int_{t_0}^{t}\frac{a}{2}e^{am(t)}\|\vec{x}(s)\|\mathrm{d}m(s).$$

由定理1得

$$\|\vec{x}(t)\|e^{am(t)} \leqslant Ke^{am(t_0)}\|\vec{x}_0\|e^{\int_{t_0}^{t}\frac{a}{2}\mathrm{d}m(s)},$$

$$\therefore\ \|\vec{x}(t)\| \leqslant K\|\vec{x}_0\|e^{-a(m(t)-m(t_0))+\frac{a}{2}(m(t)-m(t_0))} = K\|\vec{x}_0\|e^{-\frac{a}{2}(m(t)-m(t_0))}.$$

因此系统(24)的零解是指数渐近稳定的．

参 考 文 献

1 秦元勋，王慕秋，王联．运动稳定性理论与应用．北京：科学出版社，1981

2 秦元勋，王联，王慕秋．缓变系数动力系统的运动稳定性．中国科学，专辑(1)，1979：242～253

3 Rosenbork H H. The stability of linear time dependent control systems. Journal of Eletronics and Control, 1963(14～15)：1～6

4 郑淑贞，李文清．斜微分系统的稳定性．厦门大学学报(自然科学版)，1993，32(1)

5 那汤松，徐瑞云译．实变函数．上海商务印书馆，1953

Stability of Solutions of a Class of Stieltjes Differential Systems with Changed Coefficients

Jin Jun

(Department of Mathematics)

Abstract The stability of solutions of some Stieltjes differential systems with changed or slowly changed coefficients is studied. Some sufficient conditions are obtained, which guarantee the exponential asymptotic stability of equilibriums of the systems.

Key words Stieltjes differential system; existence and uniqueness; exponential asymptotic stability; slowly changed coefficient