第17卷 第6期
1993年6月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 6
June, 1993

（广义）BFOFW 模型的 Hamilton 程式及其量子化

侯伯宇 杨焕雄
（西北大学物理研究所，西安 710069）

摘 要

本文讨论了作为规范 WZNW 场论的 BFOFW 模型的 Hamilton 程式，并在此基础上研究了它的正则量子化及 BFV-BRST 量子化. 另外，本文还在经典水平上提出了一种广义的 BFOFW 模型。

一、导 言

二维共形场理论和完全可积系的联系已得到了众多的研究[1-10]. 在这些研究中，比较有代表性的是 Balog，Fehér，O'Raifeartaign，Forg'acs，Wipf 提出的理论 (BFOFW 模型)[1]：通过给著名的 WZNW 模型加入保持共形对称性的双边约束（均为第一类约束），使约束理论成为等价于常规 Toda 可积系的规范 WZNW 场论. 最近，关于 BFOFW 模型及其各种推广和研究已深入到量子场论. O'Raifeartaigh，Ruelle，Tsutsui 利用路径积分技术在量子水平上证明了 BFOFW 模型与常规 Toda 场论的等价性. BFOFW 模型中 Virasoro 代数的量子中心荷也已由 O'Raifeartaigh，Wipf 等人给出[4,6].

应该指出的是，O'Raifeartaigh 等人的量子化是在 $g=B$[4] 的规范中进行的，这种规范固定条件的导致的物理自由度之间的 Dirac 括号与其朴素 Poisson 括号相同，相应的量子化程序中不须引入 ghost 场. 但若选择 $g\neq B$ 的规范，由于必须引入 ghost 场，O'Raifeartaigh 等人的量子化方案至少在技术上是有困难的.

本文探讨 BFOFW 模型的规范无关的量子化方法. 我们首先回顾并推广 BFOFW 模型，并根据 Bowcock 提供的线索[8]将其纳入 Hamilton 正则程式，进而对它的正则量子化及 BFV－BRST 量子化[11-13]做了初步的研究. 我们发现 BFOFW 模型的这两种量子化给出不同的 Virasoro 中心荷.

二、（广义）BFOFW 模型

广义 BFOFW 模型定义为具有如下作用量的约束体系，

本文1991年12月2日收到.

$$I(g,A_+,A_-)=S(g)+\kappa\int d^2x\mathrm{Tr}[A_-(\partial_+ gg^{-1}-\mu)+A_+(g^{-1}\partial_- g-\upsilon)+A_- gA_+ g^{-1}]. \tag{1}$$

$$S(g)=\frac{\kappa}{2}\int d^2x\mathrm{Tr}(\partial_\mu gg^{-1}\partial^\mu gg^{-1})-\frac{\kappa}{3}\int d^3x\varepsilon^{ijk}\mathrm{Tr}(\partial_i gg^{-1}\partial_j gg^{-1}\partial_k gg^{-1}).$$

式中 κ 是耦合常数，$S(g)$ 是二维 WZNW 模型的作用量，场 $g(x)$ 取值在某个连通的实 Lie 群 G 上（G 具有非紧的实 Lie 代数 $\mathscr{G}$）. 约束由常数矩阵 μ、υ 引入，$A_\pm(x)$ 是相应的 Lagrange 乘子，

$$\mu=\sum_{\alpha\in\Delta_1\cup\Delta_2\cup\cdots\cup\Delta_s}\frac{\alpha^2}{2}\mu^\alpha E_{-\alpha}\qquad \upsilon=\sum_{\alpha\in\Delta_1\cup\Delta_2\cup\cdots\cup\Delta_r}\frac{\alpha^2}{2}\upsilon^\alpha E_\alpha$$

$$A_-=\sum_{\alpha\in\Phi^+}A_-^\alpha E_\alpha\qquad A_+=\sum_{\alpha\in\Phi^+}A_+^\alpha E_{-\alpha}$$

（$1\leqslant s$，$r\leqslant l$；本文中用 Φ、Φ^+、Δ_1、Δ_2、$\cdots\Delta_s$ 分别表示半单实 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的根系、正根、素根、高度为2的正根、…、高度为 s 的正根的集合，并假定 $\mathscr{G}$ 的最高根的高度为 l）

（1）式定义的广义 BFOFW 模型实际上是某种规范不变的 WZNW 场论. 容易证明，作用量（1）在如下的无穷小规范变换下是不变的，

$$\delta g=ag-gb,\delta A_-=[a,\partial_-+A_-],\delta A_+=[\partial_+-A_+,b].$$

$$a=\sum_{\alpha\in\Delta_s\cup\Delta_{s+1}\cup\cdots\cup\Delta_l}a(x)E_\alpha \tag{2}$$

$$b=\sum_{\alpha\in\Delta_r\cup\Delta_{r+1}\cup\cdots\cup\Delta_l}b(x)E_{-\alpha}$$

显然，Lagrange 乘子 $A_\pm$（x）可解释为规范场. 规范变换参数 a（x）、b（x）是时空坐标的任意函数.

设群 G 流形上的某组独立参数为 θ^a（x）（$1\leqslant a\leqslant\dim\mathscr{G}$），通过下式定义局域场 Ω（θ）、$\lambda_{a,b}$（θ）[8]：

$$\partial_a gg^{-1}\equiv\frac{\partial g}{\partial\theta^a}g^{-1}=\sum_{i=1}^{\mathrm{rank}g}H_i\Omega_a^i(\theta)+\sum_{\alpha\in\Phi}E_\alpha\Omega_a^{-\alpha}(\theta) \tag{3}$$

$$\mathrm{Tr}(\partial_a gg^{-1}[\partial_b gg^{-1},\partial_c gg^{-1}])=\partial_c\lambda_{ab}(\theta)+\partial_a\lambda_{bc}(\theta)+\partial_b\lambda_{ca}(\theta)$$

则广义 BFOFW 模型的 Lagrange 函数密度可明显地写出，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x)=&\frac{\kappa}{2}[\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_i^2}K_{ij}\Omega_a^i\Omega_b^j+2\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}\Omega_a^\alpha\Omega_b^{-\alpha}](\dot\theta^a\dot\theta^b-\theta'^a\theta'^b)\\&-\kappa\lambda_{ab}\dot\theta^a\theta'^b+\kappa(\dot\theta^a+\theta'^a)\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}\Omega_a^\alpha A_-^\alpha\\&+\kappa(\dot\theta^a-\theta'^a)\sum_{\alpha\in\Phi^+}A_+^\alpha[\sum_i\Omega_a^iL_{i,-\alpha}+\sum_{\beta\in\Phi}\Omega_a^\beta L_{-\beta-\alpha}]\\&+\kappa\sum_{\alpha\in\Phi^+}[\sum_{\beta\in\Phi^+}A_-^\alpha A_+^\beta L_{\alpha,-\beta}-A_-^\alpha\mu^\alpha-A_+^\alpha\upsilon^\alpha].\end{aligned} \tag{4}$$

式中 $L_{AB}\equiv\mathrm{Tr}$（$AgBg^{-1}$）（A、B 均为 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的 Cartan-Weyl 基）.

由标准方法和体系的能量动量张量密度 $T^{\mu\nu}$ 及其满足的连续性方程为：

$$T^{00}=\frac{\kappa}{2}\Big[\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_i^2}K_{ij}\Omega_a^i\Omega_b^j+\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}(\Omega_a^\alpha\Omega_b^{-\alpha}+\Omega_a^{-\alpha}\Omega_b^\alpha)\Big](\dot\theta^a\dot\theta^b+\theta'^a\theta'^b)$$
$$-\kappa\theta'^a\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}\Omega_a^\alpha A_-^\alpha$$
$$+\kappa\theta'^a\sum_{\alpha\in\Phi^+}A_+^\alpha\Big[\sum_i\Omega_a^iL_{i,-\alpha}+\sum_{\beta\in\Phi}\Omega_a^\beta l_{-\beta-\alpha}\Big]$$
$$+\kappa\sum_{\alpha\in\Phi^+}\Big[-\sum_{\beta\in\Phi^+}A_-^\alpha A_+^\beta l_{\alpha,-\beta}+A_-^\alpha\mu^\alpha+A_+^\alpha\upsilon^\alpha\Big]. \tag{5a}$$

$$T^{10}=-\kappa\Big[\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_i^2}K_{ij}\Omega_a^i\Omega_b^j+\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}(\Omega_a^\alpha\Omega_b^\alpha+\Omega_a^{-\alpha}\Omega_b^\alpha)\Big]\dot\theta^a\theta'^b$$
$$+\kappa\dot\theta^a\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}\Omega_a^\alpha A_-^\alpha$$
$$-\kappa\dot\theta^a\sum_{\alpha\in\Phi^+}A_+^\alpha\Big[\sum_i\Omega_a^iL_{i,-\alpha}+\sum_{\beta\in\Phi}\Omega_a^\beta L_{-\beta,-\alpha}\Big] \tag{5b}$$

$$T^{01}=-\kappa\Big[\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_i^2}K_{ij}\Omega_a^i\Omega_b^j+\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}(\Omega_a^\alpha\Omega_b^{-\alpha}+\Omega_a^{-\alpha}\Omega_b^\alpha)\Big]\dot\theta^a\theta'^b$$
$$-\kappa\theta'^a\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}\Omega_a^\alpha A_-^\alpha$$
$$-\kappa\theta'^a\sum_{\alpha\in\Phi^+}A_+^\alpha\Big[\sum_i\Omega_a^iL_{i,-\alpha}+\sum_{\beta\in\Phi}\Omega_a^\beta L_{-\beta,-\alpha}\Big]. \tag{5c}$$

$$T^{11}=\frac{\kappa}{2}\Big[\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_i^2}K_{ij}\Omega_a^i\Omega_b^j+\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}(\Omega_a^\alpha\Omega_b^{-\alpha}+\Omega_a^{-\alpha}\Omega_b^\alpha)\Big](\dot\theta^a\dot\theta^b+\theta'^a\theta'^b)$$
$$+\kappa\dot\theta^a\sum_{\alpha\in\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}\Omega_a^\alpha A_-^\alpha$$
$$+\kappa\dot\theta^a\sum_{\alpha\in\Phi^+}A_+^\alpha\Big[\sum_i\Omega_a^iL_{i,-\alpha}+\sum_{\beta\in\Phi}\Omega_a^\beta L_{-\beta,-\alpha}\Big]$$
$$+\kappa\sum_{\alpha\in\Phi^+}\Big[\sum_{\beta\in\Phi^+}A_-^\alpha A_+^\beta L_{\alpha,-\beta}-A_-^\alpha\mu^\alpha-A_+^\alpha\upsilon^\alpha\Big]. \tag{5d}$$

$$\partial_\mu T^{\mu\upsilon}=0\qquad(\mu,\upsilon=0.1). \tag{6}$$

于是看到在 $A_\pm=0$的规范中，$T^{\mu\upsilon}$具有对称、无迹、守恒的性质，从而保证了该规范中的广义 BFOFW 模型的共形对称性.

如将约束矩阵 μ、υ 取为，

$$\mu=\sum_{\alpha\in\Delta_1}\frac{\alpha^2}{2}\mu^\alpha E_{-\alpha},\qquad \upsilon=\sum_{\alpha\in\Delta 1}\frac{\alpha^2}{2}\upsilon^\alpha E_\alpha. \tag{7}$$

(1) 式定义的广义 BFOFW 模型即回到常规的 BFOFW 模型[1].

三、Hamilton 正则程式

为了实现上述广义 BFOFW 模型的量子化，需要在经典框架内将其纳入 Hamilton 正

则程式. 首先在群 G 流形上定义相空间：把 θ^a、A_+^α、A_-^α （$1\leqslant a\leqslant \dim\mathscr{G}$，$\alpha\varepsilon\Phi^+$）看作 G 流形上相互独立的正则坐标，并定义相应的共轭正则动量：

$$\pi_a = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot\theta^a} = \kappa\Big[\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_i^2}K_{ij}\Omega_a^i\Omega_b^j + \sum_{\alpha\varepsilon\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}(\Omega_a^\alpha\Omega_b^{-\alpha} + \Omega_a^{-\alpha}\Omega_b^\alpha)\Big]\dot\theta^b$$
$$- \kappa\lambda_{ab}\theta'^b + \kappa\sum_{\alpha\varepsilon\Phi^+}A_+^\alpha\Big[\sum_i\Omega_a^iL_{i,-\alpha} + \sum_{\beta\varepsilon\Phi}\Omega_a^\beta L_{-\beta,-\alpha}\Big]$$
$$+ \kappa\sum_{\alpha\varepsilon\Phi^+}\frac{2}{\alpha^2}\Omega_a^\alpha A_-^\alpha. \tag{8a}$$

$$P_+^{-\alpha} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot A_+^\alpha} \simeq 0 \qquad (\alpha\varepsilon\Phi^+). \tag{8b}$$

$$P_-^{-\alpha} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot A_-^\alpha} \simeq 0 \qquad (\alpha\varepsilon\Phi^+). \tag{8c}$$

和基本 Poisson 括号：

$$\{\theta^a(x), \Pi_b(y)\} = \delta_b^a\delta(x_1 - y_1). \tag{9a}$$

$$\{A_+^\alpha(x), P_+^{-\beta}(y)\} = \{A_-^\alpha(x), P_-^{-\beta}(y)\} = \delta^{\alpha\beta}\delta(x_1 - y_1). \tag{9b}$$

（其余的 Poisson 括号均为零）. 体系的正则 Hamilton 函数密度表为，

$$\mathscr{H}_c(x) = T^{00} = \frac{1}{4\kappa}\sum_{ij}\frac{\alpha_j^2}{2}K_{ij}^{-1}[\mathscr{J}(H_j,x)\mathscr{J}(H_j,x) + \widetilde{\mathscr{J}}(H_i,x)\widetilde{\mathscr{J}}(H_j,x)]$$
$$+ \frac{1}{4\kappa}\sum_{\alpha\varepsilon\Phi}\frac{\alpha^2}{2}[\mathscr{J}(E_\alpha,x)\mathscr{J}(E_{-\alpha},x) + \widetilde{\mathscr{J}}(E_\alpha,x)\widetilde{\mathscr{J}}(E_{-\alpha},x)]$$
$$+ \sum_{\alpha\varepsilon\Phi^+}A_+^\alpha(x)[\widetilde{\mathscr{J}}(E_{-\alpha},x) + \kappa\upsilon^\alpha]$$
$$- \sum_{\alpha\varepsilon\Phi^+}A_-^\alpha(x)[\mathscr{J}(E_\alpha,x) - \kappa\mu^\alpha]. \tag{10}$$

这里，

$$\mathscr{J}(H_i,x) \equiv \omega^{ai}\Pi_a + \kappa\omega^{ai}\lambda_{ab}\theta'^b + \kappa\sum_j\frac{2}{\alpha_j^2}K_{ji}\Omega_a^j\theta'^a,$$

$$\mathscr{J}(E_\alpha,x) \equiv \omega^{a\alpha}\Pi_a + \kappa\omega^{a\alpha}\lambda_{ab}\theta'^b + \frac{2\kappa}{\alpha^2}\Omega_a^\alpha\theta'^a,$$

$$\widetilde{\mathscr{J}}(H_i,x) \equiv -\sum_j l_{ji}\Big[\sum_l\frac{\alpha_l^2}{2}K_{jl}^{-1}(\omega^{al}\Pi_a + \kappa\omega^{al}\lambda_{ab}\theta'^b) - \kappa\Omega_a^j\theta'^a\Big]$$
$$- \sum_{\beta\varepsilon\Phi}L_{-\beta,i}\Big[\frac{\beta^2}{2}(\omega^{a\beta}\Pi_a + \kappa\omega^{a\beta}\lambda_{ab}\theta'^b) - \kappa\Omega_a^\beta\theta'^a\Big],$$

$$\widetilde{\mathscr{J}}(E_\alpha,x) \equiv -\sum_j L_{j\alpha}\Big[\sum_l\frac{\alpha_l^2}{2}K_{jl}^{-1}(\omega^{al}\Pi_a + \kappa\omega^{al}\lambda_{ab}\theta'^b) - \kappa\Omega_a^j\theta'^a\Big]$$
$$- \sum_{\beta\varepsilon\Phi}L_{-\beta,\alpha}\Big[\frac{\beta^2}{2}(\omega^{a\beta}\Pi_a + \kappa\omega^{a\beta}\lambda_{ab}\theta'^b) - \kappa\Omega_a^\beta\theta'^a\Big]$$

$$(i = 1,2,\cdots,\mathrm{rank}\mathscr{G};\ \alpha\varepsilon\Phi;\ \omega\Omega = 1)$$

是经典的 Kac-Moody 流分量[14]：

$$\{\mathscr{J}(A,x), \mathscr{J}(B,y)\} = \mathscr{J}([A,B],x)\delta(x_1 - y_1) + 2\kappa\mathrm{Tr}(AB)\delta'(x_1 - y_1). \tag{11a}$$

$$\{\underset{\sim}{\mathscr{J}}(A,x),\widetilde{\mathscr{J}}(B,y)\} = \underset{\sim}{0}. \tag{11b}$$

$$\{\widetilde{\mathscr{J}}(A,x),\widetilde{\mathscr{J}}(B,y)\} = \widetilde{\mathscr{J}}([A,B],x)\delta(x_1 - Y_1) - 2\kappa\mathrm{Tr}(AB)\delta'(x_1 - y_1). \tag{11c}$$

现在回到(8)式. 由于 $P_{\pm}^{-\alpha}\simeq 0(\alpha\in\Phi^+)$，广义 BFOFW 模型实际上是约束的 Hamilton 体系. 可以根据 Dirac 理论[13]对它作经典分析. 首先写出体系的待定的第一类 Hamilton 量 H_1，

$$H_1 = \int \mathrm{d}x_1 \mathscr{H}_c(x) + \int \mathrm{d}x_1 \sum_{\alpha\in\Phi^+} [\lambda_+^\alpha(x)P_+^{-\alpha}(x) + \lambda_-^\alpha(x)P_-^{-\alpha}(x)].$$

于是，自洽性条件 $\{G_a(x),H_1\} \simeq 0(a = 1,2,\cdots)$ 给出了体系中约束的完备集

$$\begin{aligned}
&G_1^\alpha(x) = P_+^{-\alpha}(x) \simeq 0 \qquad (\alpha\in\Phi^+). \\
&G_2^\alpha(x) = P_-^{-\alpha}(x) \simeq 0 \qquad (\alpha\in\Phi^+). \\
&G_3^\alpha(x) = \begin{cases} \mathscr{J}(E_\alpha,x) - \kappa\mu^\alpha \simeq 0 & (\alpha\in\Delta_1 U\Delta_2 U\cdots U\Delta_s). \\ \mathscr{J}(E_\alpha,x) \simeq 0 & (\alpha\in\Delta_{s+1}U\cdots U\Delta_l). \end{cases} \\
&G_4^\alpha(x) = \begin{cases} -\widetilde{\mathscr{J}}(E_{-\alpha},x) - \kappa\upsilon^2 \simeq 0 & (\alpha\in\Delta_1 U\Delta_2\cdots U\Delta_r). \\ -\widetilde{\mathscr{J}}(E_{-\alpha},x) \simeq 0 & (\alpha\in\Delta_{r+1}U\Delta_{r+2}U\cdots U\Delta_l). \end{cases} \\
&G_5^\alpha(x) = \kappa\sum_{\beta>\alpha>0} N_{\alpha,\beta-\alpha}\mu^\beta A_-^{\beta-\alpha}(x) \simeq 0(\alpha\in\Delta_1 U\Delta_2 U\cdots U\Delta_{s-1}). \\
&G_6^\alpha(x) = \kappa\sum_{\beta>\alpha>0} N_{\alpha,\beta-\alpha}\upsilon^\beta A_+^{\beta-\alpha}(X) \simeq 0 \qquad (\alpha\in\Delta_1 U\Delta_2 U\cdots U\Delta_{r-1}.)
\end{aligned} \tag{12}$$

以及两个确定 Lagrange 乘子 $\lambda_\pm(x)$ 的强方程，

$$\kappa\sum_{\beta\in\Phi^+} N_{\alpha\beta}\mu^{\alpha+\beta}\lambda_-^\beta(x) = \kappa\sum_{\beta\in\Phi^+} N_{\alpha\beta}\upsilon^{\alpha+\beta}\lambda_+(x) = 0 \quad (\alpha\in\Phi^+).$$

不难看出，如果要求 $\alpha\in\Delta_s$. $\beta\in\Delta_r$ 时 μ^α 和 υ^β 全部为非零常数，则约束 $G_1^\beta(x)$，$G_2^\alpha(x)$，$G_3^\alpha(x)$，$G_4^\beta(x)$ $(\alpha\in\Delta_s U\Delta_{s+1}U\cdots U\Delta_l,\ \beta\epsilon\Delta_r U\Delta_{r+1}U\cdots U\Delta_l)$ 是第一类的. 其余的约束是第二类的. 第二类约束的存在要求在理论中定义 Dirac 括号[13]代替朴素的 Poisson 括号，从而将所有的第二类约束都变成强方程，使理论中仅留下第一类约束，如此奠定量子化研究的基础. 因此，对于本文的目的而言，以下只须研究仅含第一类约束的 BFOFW 模型.

BFOFW 模型中约束的完备集为：

$$G_1^\alpha(x) = P_+^{-\alpha}(x) \simeq 0. \tag{13a}$$

$$G_2^\alpha(x) = p_-^{-\alpha}(X) \simeq 0 \tag{13b}$$

$$G_3^\alpha(x) = \underset{\sim}{\mathscr{J}}(E_\alpha,x) - \kappa\mu^\alpha \simeq 0 \qquad (\alpha\in\Phi^+) \tag{13c}$$

$$G_4^\alpha(x) = -\widetilde{\mathscr{J}}(E_{-\alpha},x) - \kappa\upsilon^\alpha \simeq 0 \tag{13d}$$

(μ^α，υ^α 只有当 $\alpha\in\Delta_1$时才取非零值，这些约束均是第一类的.

BFOFW 模型的广义 Hamilton 量 H_E 表为

$$H_E = \int \mathrm{d}x_1 [\mathscr{H}_c(x) + \sum_{\alpha\in\Phi^+}\sum_{a=1}^{4}\lambda_a^\alpha(x)G_a^\alpha(x)]. \tag{14}$$

式中 $\lambda_a^\alpha(x)$ 是时空坐标的任意函数，它们体现着理论的规范对称性. 根据 (14) 式知体

系的正则运动方程可表为

$$
\begin{aligned}
&\partial_- J + \kappa\partial_+ A_- + [A_-, J] = 0, \\
&\partial_+ \tilde{J} - \kappa\partial_- A_+ + [\tilde{J}, A_+] = 0, \\
&\mathrm{Tr}[E_\alpha(J - \kappa\mu)] = 0, \\
&\mathrm{Tr}[E_{-\alpha}(\tilde{J} + \kappa\upsilon)] = 0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

$$(\partial_\pm = \partial_0 \pm \partial_1, J = \kappa\partial_+ g g^{-1} + \kappa g A_+ g^{-1}, \tilde{J} = -\kappa g^{-1}\partial_- g - \kappa g^{-1} A_- g).$$

容易验证，H_E 是体系的第一类 Hamilton 量，但 $\mathscr{H}_c(x)$ 并不是第一类 Hamilton 函数密度. 根据[1]的建议，体系的第一类 Hamilton 密度应取为

$$\mathscr{H}_0(x) = \mathscr{H}_c(X) - \sum_{ij} K_{ji}^{-1}[\mathscr{J}^1(H_j, X) + \tilde{\mathscr{J}}^1(H_j, x)]. \tag{16}$$

这里约定 $\mathscr{J}^1(H_j, x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\mathscr{J}(H_j, x)$.

四、BFOFW 模型的正则量子化

在（15）式表达的运动方程中，除了含有 rank$\mathscr{G}$ 个物理自由度外，还包含着（dim$\mathscr{G}$-rank$\mathscr{G}$ 个）规范自由度. 选择2（dim$\mathscr{G}$-rank$\mathscr{G}$）个相互独立的条件

$$A_\pm^\alpha(x) = 0, \mathscr{J}(E_{-\alpha}, x) = 0, \tilde{\mathscr{J}}(E_\alpha, x) = 0 \qquad (\alpha\varepsilon\Phi^+). \tag{17}$$

固定规范，便可把运动方程及 Hamilton 函数密度仅用物理自由度表出：

$$\partial_- \mathscr{J}(H_i, x) = 0, \partial_+ \tilde{\mathscr{J}}(H_i, x) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, \mathrm{rank}\mathscr{G}) \tag{18}$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H}_0(x) = &\frac{1}{4\kappa}\sum_{ij}\frac{\alpha_j^2}{2}K_{ij}^{-1}[\mathscr{J}(H_i, x)\mathscr{J}(H_j, x) + \tilde{\mathscr{J}}(H_i, x)\tilde{\mathscr{J}}(H_j, x)] \\
&- \sum_{ij} K_{ji}^{-1}[\mathscr{J}^1(H_j, x) + \tilde{\mathscr{J}}^1(H_j, x)].
\end{aligned} \tag{19}
$$

在（17）式所示的规范下，集合（13）中的约束均成为第二类约束. 包括规范固定条件在内，现在理论中共有4（dim$\mathscr{G}$-rank$\mathscr{G}$）个相互独立的第二类约束，它们导致的非零的 Dirac 括号为

$$\{\mathscr{J}(H_i, x), \mathscr{J}(H_j, y)\}^* = \frac{4\kappa}{\alpha_i^2}K_{ij}\delta'(x_1 - y_1). \tag{20a}$$

$$\{\tilde{\mathscr{J}}(H_i, x), \tilde{\mathscr{J}}(H_j, y)\}^* = -\frac{4\kappa}{\alpha_i^2}K_{ij}\delta'(x_1 - y_1). \tag{20b}$$

$$(i, j = 1, 2, \cdots, \mathrm{rank}\mathscr{G})$$

下面考虑正则量子化. 把 $\mathscr{J}(H_i, x)$，$\tilde{\mathscr{J}}(H_i, y)$ 作为 Hilbert 空间中的 Hermite 算子，并假定它们服从如下量子对易括号：

$$
\begin{aligned}
&[\mathscr{J}(H_i, x), \mathscr{J}(H_j, y)] = i\,\frac{4\kappa}{\alpha_i^2}K_{ij}\delta'(x_1 - y_1), \\
&[\tilde{\mathscr{J}}(H_i, x), \tilde{\mathscr{J}}(H_j, y)] = -i\,\frac{4\kappa}{\alpha_i^2}K_{ij}\delta'(x_1 - y_1), \\
&[\mathscr{J}(H_i, x), \tilde{\mathscr{J}}(H_j, y)] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, \mathrm{rank}\mathscr{G}).
\end{aligned} \tag{21}
$$

如此便在（17）式的规范中实现了 BFOFW 模型的量子化. 在量子理论中，体系的运动方

程仍由（18）给出，但其 Hamilton 密度算子表为：

$$\mathscr{H}_0(x) = -2\pi\sum_{M\in\mathbb{Z}} e^{2\pi iMx_1}L_M - 2\pi\sum_{M\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi iMx_1}\widetilde{L}_M. \tag{22a}$$

$$L_M = -\frac{\pi}{2\kappa}\sum_{ij}\frac{\alpha_j^2}{2}K_{ij}^{-1}\Big[\sum_{N<0}\mathscr{J}_N(H_j)\mathscr{J}_{M-N}(H_i) + \sum_{N\geq 0}\mathscr{J}_{M-N}(H_i)\mathscr{J}_N(H_i)\Big]$$
$$-2\pi iM\sum_{ij}K_{ij}^{-1}\mathscr{J}_M(H_i). \tag{22b}$$

$$\widetilde{L}_M = -\frac{\pi}{2\kappa}\sum_{ij}\frac{\alpha_j^2}{2}K_{ij}^{-1}\Big[\sum_{N<0}\widetilde{\mathscr{J}}_N(H_j)\widetilde{\mathscr{J}}_{M-N}(H_i) + \sum_{N\geq 0}\widetilde{\mathscr{J}}_{M-N}(H_i)\widetilde{\mathscr{J}}_N(H_j)\Big]$$
$$+2\pi iM\sum_{ij}K_{ij}^{-1}\widetilde{\mathscr{J}}_M(H_i). \tag{22c}$$

式中 $\mathscr{J}_M$ (H_j)，$\widetilde{\mathscr{J}}_N$ (H_j) 是 $\mathscr{J}$ $(H_j,\ x)$，$\widetilde{\mathscr{J}}$ $(H_j,\ x)$ 的 Fourier 变换，

$$\mathscr{J}(H_j,x) = -2\pi\sum_{M\in\mathbb{Z}} e^{2iMx_1}\mathscr{J}_M(H_j),$$
$$\widetilde{\mathscr{J}}(H_j,x) = -2\pi\sum_{M\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi iMx_1}\widetilde{\mathscr{J}}_M(H_j).$$

把量子对易括号（21）转移到动量表象，不难发现 L_M，$\widetilde{L}_N$（M，$N\in\mathbb{Z}$）生成了两个相互对易的 Virasoro 代数：

$$[L_M,L_N] = (M-N)L_{M+N} + \mathrm{rank}\mathscr{G}\,\frac{(M^3-M)}{12}\delta_{M+N,0}$$
$$-4\pi\kappa M^3\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_j^2}K_{ji}^{-1}\delta_{M+N,0}. \tag{23a}$$

$$[L_M,\widetilde{L}_N] = 0. \tag{23b}$$

$$[\widetilde{L}_M,\widetilde{L}_N] = (M-N)\widetilde{L}_{M+N} + \mathrm{rank}\mathscr{G}\,\frac{(M^3-M)}{12}\delta_{M+N,0}$$
$$-4\pi\kappa M^3\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_j^2}K_{ji}^{-1}\delta_{M+N,0} \tag{23c}$$

其中心荷均为，

$$c = \mathrm{rank}\mathscr{G} - 48\pi\kappa\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_j^2}K_{ji}^{-1}. \tag{24}$$

五、BFOFW 模型的 BFV-BRST 量子化

BFOFW 模型是一种具有规范对称性的 WZNW 场论，其量子化可以采取优美的 BFV-BRST 方案[11,12]. BFV-BRST 量子化的主要特色是定义了一个幂零的 BRST 荷算子 Q_B. 对于 BFOFW 模型，

$$Q_B = \int \alpha x_1\sum_{\alpha\in\Phi^+} :\Big[\sum_{i=1}^{4}G_i^\alpha(x)b_i^\alpha(x)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Phi^+}\sum_{i=3}^{4}N_{\alpha\beta}b_i^\alpha(x)b_i^\beta(x)C_i^{-(\alpha+\beta)}(x)\Big]:. \tag{25}$$

式中 $b_i^\alpha(x)$、$C_j^{-\beta}(x)$ 分别是 Hilbert 空间中的 Hermite 算子和 anti-Hermite 算子，其 ghost

数分别为 N_{gh} $(b_i^a)=1$，N_{gh} $(C_j^{-\beta})=-1$，二者满足如下的反对易括号：

$$[b_i^a(x),b_j^\beta(y)]_+=[C_i^{-a}(x),C_j^{-\beta}(y)]_+=0,$$

$$[b_i^a(x),C_j^{-\beta}(y)]_+=i\delta_{ij}\delta^{a\beta}\delta(x_1-y_1). \tag{26}$$

另外，（25）式中出现的正规乘积是在动量表象中定义的：设 $A=\sum\limits_M A_M e^{2\pi iMx_1}$，$B=\sum\limits_M B_M e^{2\pi iMx_1}$ $(M\in\mathbb{Z})$，则

$$:A_MB_N:=\begin{cases}A_MB_N & (M<0),\\ (-1)^{\varepsilon(A)\varepsilon(B)}B_NA_M & (M\geqslant 0).\end{cases} \tag{27}$$

$\in(A)$、$\in(B)$ 分别代表 A、B 算子的 Grassmann 宇称.

在 BFV—BRST 方案中，体系的 Hamilton 密度是 Hilbert 空间中 ghost 数为零的 BRST 不变的 Hermite 算子. 计及重整化（renormalization）效应及 ghost 的贡献，Hamilton 密度可表为：

$$\mathscr{H}(x)=L(x)+\widetilde{L}(x). \tag{28}$$

$$\begin{aligned}L(x)=&-\frac{\pi}{k+C_\psi}:[\sum_{ij}\frac{\alpha_j^2}{2}K_{ij}^{-1}\mathscr{J}(H_i,x)\mathscr{J}(H_j,x)\\&+\sum_{\alpha\epsilon\Phi}\frac{\alpha^2}{2}\mathscr{J}(E_\alpha,x)\mathscr{J}(E_{-\alpha},x)]:-\sum_{ij}K_{ji}^{-1}\mathscr{J}'(H_j,x)\\&+\sum_{\alpha\epsilon\Phi^+}:[(1-\sum_{ij}K_{\alpha j}K_{ji}^{-1})C_3^{-\alpha}(x)b'^{\alpha}_3(x)-\sum_{ij}K_{\alpha j}K_{ji}^{-1}C'^{-\alpha}_3(x)b_3^\alpha(x)]:.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{L}(x)=&-\frac{\pi}{k+C_\psi}:[\sum_{ij}\frac{\alpha_j^2}{2}K_{ij}^{-1}\widetilde{\mathscr{J}}(H_i,x)\widetilde{\mathscr{J}}(H_j,x)+\sum_{\alpha\epsilon\Phi}\frac{\alpha^2}{2}\widetilde{\mathscr{J}}(E_\alpha,x)\widetilde{\mathscr{J}}(E_{-\alpha},x)]:\\&-\sum_{ij}K_{ji}^{-1}\widetilde{\mathscr{J}}'(H_j,x)\\&+\sum_{\alpha\epsilon\Phi^+}:[(\sum_{ij}K_{\alpha j}K_{ji}^{-1}-1)C_4^{-\alpha}(x)b'^{\alpha}_4(x)+\sum_{ij}K_{ji}^{-1}K_{\alpha j}C'^{-\alpha}_4(x)b_4^\alpha(x)]:.\end{aligned}$$

式中 $k\equiv-4\pi\kappa$，C_ψ 是 Lie 代数 g 的 Coster 数.

注意到 Q_B 满足

$$N_{gh}(Q_B)=1,\quad Q_B^+=Q_B,\quad Q_B^2=0. \tag{29}$$

故与物理态类似[12,9]，Hamilton 密度也不是完全确定的，

$$\mathscr{H}_1(x)=\mathscr{H}(x)+[Q_B,\Phi]_+$$

与 $\mathscr{H}$ (x) 代表着同一个可观测量.

最后简单地考察一下体系中的量子共形代数. 按如下方式作 L (x) 的 Fourier 展开，

$$L(x)=-2\pi\sum_{N\epsilon\mathbb{Z}}L_Ne^{2\pi iNx_1}+\pi k\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_j^2}K_{ji}^{-1}+\pi\sum_{\alpha\epsilon\Phi^+}h_\alpha(h_\alpha-1)$$

$(h_\alpha\equiv\sum\limits_{ij}K_{\alpha j}K_{ji}^{-1})$ 则直接的计算可以证明：

$$[L_M,L_N]=(M-N)L_{M+N}+\frac{C}{12}(M^3-M)\delta_{M+N,0}$$

$$c=\frac{k\dim\mathscr{G}}{k+c_\psi}+12k\sum_{ij}\frac{2}{\alpha_j^2}K_{ji}^{-1}-2\sum_{\alpha\epsilon\Phi^+}[6h_\alpha(h_\alpha-1)+1]. \tag{30}$$

(30) 式正是 [4] 中给出的 BFOFW 模型的 Virasoro 量子中心，但与前节正则量子化给出的结果不符.

六、讨论

本文在 Hamilton 程式的基础上分别讨论了 BFOFW 模型的正则量子化及 BFV-BRST 量子化. 主要结果是：本文采取的 BFV-BRST 方法避免了 [3] 中实际上仅进行了"Toda 场的量子化"的缺点，并得到了比 [2] 中精确度更高的 Q_B 算子. 另外，本文发现对 BFOFW 模型而言，正则量子化和 BFV-BRST 量子化将给出不同的 Virasoro 中心荷.

本文还在经典水平上推广 BFOFW 模型，提出了一个同时含有第一、二类约束的 Hamilton 体系 (广义 BFOFW 模型). 研究这个 Hamilton 体系的相空间结构、可积性、共形对称代数及相联系的非线性系统的性质，也许是很有意义的课题.

杨焕雄对赵柳博士的有益的讨论和鼓励表示感谢.

附 录

本附录给出正文中使用的半单 Lie 代数 $\mathscr{G}$ 的 Cartan-Weyl 基：

$$[H_i, H_j] = 0, \qquad [H_i, E_\alpha] = K_{\alpha i} E_\alpha.$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \sum_{ij} K_{ij}^{-1} K_{j\alpha} H_i \delta_{\alpha+\beta,0} + N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$$

(i, $j=1$, 2, $\cdots$, rank$\mathscr{G}$; α. $\beta \in \Phi$).

式中 K_{ab}是推广了的 Cartan 矩阵，

$$K_{ab} = \frac{2a.b}{b^2}, \sum_b K_{ab}^{-1} K_{bc} = \delta_{ac}.$$

$N_{\alpha,\beta}$是满足如下计算规则的常数：

$$N_{\alpha,\beta} = - N_{\beta,\alpha}, N_{\alpha,\beta} = - N_{-\alpha,-\beta},$$

$$N_{\alpha,\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\beta^2} N_{-\alpha,\alpha+\beta}.$$

在此 Cartan-Weyl 基下，$\mathscr{G}$ 的 Killing 双线性型定义为，

$$\mathrm{Tr}(H_i H_j) = \frac{2}{\alpha_i^2} K_{ij}, \mathrm{Tr}(E_\alpha E_\beta) = \frac{2}{\alpha^2} \delta_{\alpha+\beta,0}, \mathrm{Tr}(H_i E_\alpha) = 0.$$

另外，(28) 式中出现的 $\mathscr{G}$ 的 Coxter 数满足：

$$\delta^{ij} C_\psi = - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\mathrm{rank}g} \sum_{\alpha \in \Phi} \frac{\alpha^2}{2} K_{ik}^{-1} K_{\alpha j} K_{k\alpha},$$

$$C_\psi = - \sum_{ij} \frac{\alpha_i^2}{2} K_{ij}^{-1} K_{\alpha j} K_{\alpha i} - \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi} \frac{\alpha^2}{2} N_{\alpha,\beta} N_{-\alpha,\alpha+\beta}.$$

参 考 文 献

[1] J. Balog, L. Féher, L. O'Raifeartaigh, P. Forgács and A. Wipf, *Ann. Phys.*, **203** (1991), 76; *Phys. Lett.*, **B227** (1989), 214, **B244** (1990), 435.

[2] M. Bershadsky, H. Ooguri, *Commun. Math. Phys.*, **126** (1989), 49, M. Bershadsky, IASSNS—HEP—90/44

[3] L. O'Raifeartaigh, P. Ruelle, I. Tsutsui, *Phys. Lett.*, **B258** (1991), 359.

[4] L. O'Raifeartaigh and A. Wipf, DIAS—STP—90—19, ETH—TH/90—20, L. O'Raifeartaigh, DIAS—STP—90—43, DIAS—STP—90—44

[5] O. Babelon, L. Bonora, *Phys. Lett.*, **B244** (1990), 220.

[6] F. A. Bias, T. Tjin, P. van. Driel, *Nucl. Phys.*, **B357** (1991), 632.

[7] L. Chao, NWU/IMP/910627, to be published in Commun. Theore. Phys.

[8] P. Bowcock, *Nucl. Phys.*, **B316** (1989), 80, T. Inamoto, UT—590 (1991).

[9] D. Karabali, H. J. Schnitzer, *Nucl. Phys.*, **B329** (1990), 649.

[10] B. Hou, L. Chao and H. Yang, *Phys. Lett.*, **B363** (1991), 353; 侯伯宇、赵柳、杨焕雄，高能物理与核物理，**15** (1991), 701.

[11] Henneaux, *Phys. Rep.*, **126** (1985), 1.

[12] T. Kugo, I. Ojima, *Supp. Prog. Theor. Phys.*, **66** (1979), 1. M. Kato, K. Ogawa, *Nucl. Phys.*, **B212** (1983), 443.

[13] D. A. M. Dirac, Lectures on quantum mechanics (Belfer Graduate School of Science, New York 1964).

[14] 杨焕雄，高能物理与核物理，**16** (1992), 696.

The Hamiltonian Formalism and Quantizations of (Generalized) BFOFW Model

HOU BOYU YANG HUANXIONG

(*Institute of Modern Physics*, *Northwest University*, *Xian* 710069)

ABSTRACT

In this article, we discussed the Hamiltonian formalism of BFOFW model, studied its Dirac canonical quantization and BFV-BRST quantization. We proposed a new kind of gauged WZNW theories, which was called in the text generalized BFOFW model.