文章编号: 1000-341X(2006)01-0096-07 **文献标识码**: **A**

一类 Morita Contexts 的同调维数

欧阳伦群
(湖南科技大学数学系, 湖南 湘潭 411201)
(E-mail: Homo914@sohu.com)

摘 要: 本文得到了一类 Mortia Contexts 的总体维数与环 R 的总体维数的相等关系, 并且将这个结论推广到 $n\times n$ 矩阵环.

关键词: 总体维数; 投射模; 矩阵环.
MSC(2000): 16D50, 16E40
中图分类: O153.3

1 引 言

设 R 是含有单位元 1 的结合环, e 是 R 中的幂等元, 令 $T=\begin{bmatrix} R & Re \\ eR & eRe \end{bmatrix}$, 按通常矩阵运算 T 是 Morita Contexts, Lgd$R$, Lgd$T$ 分别表示环 R, 环 T 的总体维数, 本文将证明 Lgd$T$=Lgd$R$, 进一步地, 我们把这个结果推广到了 $n\times n$ 矩阵环.

记 $R^{2\times1}=\{\begin{bmatrix} x_1 \\ ex_2 \end{bmatrix} \mid x_i\in R, i=1,2.\}$, 对任意的 $\alpha=\begin{bmatrix} x_1 \\ ex_2 \end{bmatrix}\in R^{2\times1}, \beta=\begin{bmatrix} y_1 \\ ey_2 \end{bmatrix}\in R^{2\times1}, \gamma\in R$, 我们定义: $\alpha+\beta=\begin{bmatrix} x_1 \\ ex_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1 \\ ey_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ e(x_2+y_2) \end{bmatrix}, \alpha\gamma=\begin{bmatrix} x_1 \\ ex_2 \end{bmatrix}\gamma=\begin{bmatrix} x_1\gamma \\ ex_2\gamma \end{bmatrix}$. 按照这样的定义, 显然 $R^{2\times1}$ 是一个右 R- 模, 同样对任意的 $m=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}e \\ em_{21} & em_{22}e \end{bmatrix}\in T$. 我们定义 $m\alpha=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}e \\ em_{21} & em_{22}e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ ex_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11}x_1+m_{12}ex_2 \\ em_{21}x_1+em_{22}ex_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11}x_1+m_{12}ex_2 \\ e(m_{21}x_1+m_{22}ex_2) \end{bmatrix}\in R^{2\times1}$. 按此定义 $R^{2\times1}$ 显然是一个左 T- 模.

记 $R^{1\times2}=\{(x_1,\,x_2e,)|x_i\in R, i=1,2.\}$, 用类似的方法, 易证 $R^{1\times2}$ 是一个左 R- 模, 同时也是一个右 T- 模.

2 预备知识

引理 1 (1) $R^{2\times1}$ 是投射的左 T- 模, 也是投射的右 R- 模.

(2) $R^{1\times2}$ 是投射的右 T- 模, 也是投射的左 R- 模.

证明 (1) 和 (2) 的证明方法类似, 这里只给出 (1) 的证明. 因为 $R^{2\times1}\cong R\bigoplus eR$, $eR\bigoplus(1-e)R=R$, 所以 $R^{2\times1}$ 是投射的左 $R-$ 模. $T\cong\begin{bmatrix} R \\ eR \end{bmatrix}\bigoplus\begin{bmatrix} Re \\ eRe \end{bmatrix}\cong R^{2\times1}\bigoplus\begin{bmatrix} Re \\ eRe \end{bmatrix}$, 所以 $R^{2\times1}$ 是投射的左 T- 模.

引理 2 (1) P 是投射左 R- 模, 则 $R^{2\times1}\bigotimes\limits_R P$ 是投射左 T- 模.

收稿日期: 2003-03-31; **接受日期**: 2004-04-08

(2) P 是投射左 T- 模，则 $R^{1\times 2}\bigotimes\limits_T P$ 是投射左 R- 模.

证明 (1) 和 (2) 的证明类似，我们只给出 (1) 的证明，令 F 是一个自由的 R- 模，那么 $F\cong\coprod R$. $R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R F\cong R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R\coprod R\cong\coprod R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R R\cong R^{2\times 1}$, 由于 $R^{2\times 1}$ 是投射的左 T- 模，故 $R^{n\times 1}\bigotimes\limits_R F$ 也是投射的左 T- 模，由于 P 是投射模，存在 Q 和自由模 F, 使得 $P\bigoplus Q=F$, 于是 $R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R F=R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R(P\bigoplus Q)=R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R P\bigoplus R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R Q$, 所以 $R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R P$ 也是投射的左 T-模.

引理 3 (1) $R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R R^{1\times 2}\cong T$.

(2) $R^{1\times 2}\bigotimes\limits_T R^{2\times 1}\cong R$.

证明 (1) 考虑下列图形

$$\begin{array}{ccc} R^{2\times 1}\times R^{1\times 2} & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & R^{2\times 1}\bigotimes\limits_R R^{1\times 2} \\ f\Big\downarrow & \swarrow h & \\ T & & \end{array},$$

其中 φ 为张量映射，我们定义 f 为： $f:\ R^{2\times 1}\times R^{1\times 2}\longrightarrow T$

$$\left[\begin{pmatrix} x_1\\ ex_2\end{pmatrix},\quad (y_1,y_2e)\right]\longrightarrow\begin{bmatrix} x_1\\ ex_2\end{bmatrix}\quad(y_1,y_2e)\ =\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2e\\ ex_2y_1 & ex_2y_2e\end{bmatrix}\in T.$$

显然 f 是一个线性平衡映射，于是存在同态映射 h, 使上面图形可交换. 下面我们证明 h 是一个同构. 对任意的 $\gamma=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12}e\\ ex_{21} & ex_{22}e\end{bmatrix}\in T$, 由于 $\gamma=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12}e\\ ex_{21} & ex_{22}e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11}\\ ex_{21}\end{bmatrix}(1,0)+\begin{bmatrix} x_{12}e\\ ex_{22}e\end{bmatrix}\ (0,\ e)$. $h\left[\begin{pmatrix} x_{11}\\ ex_{21}\end{pmatrix}\bigotimes\limits_R(1,\ 0)+\begin{bmatrix} x_{12}e\\ ex_{22}e\end{bmatrix}\bigotimes\limits_R(0,\ e)\right]=\gamma$, 从而得到 h 是一个满同态. 我们再证 h 是一个单同态，令 $h\left[\sum\limits_{i=1}^n\begin{pmatrix} x_{1i}\\ ex_{2i}\end{pmatrix}\bigotimes\limits_R\quad(y_{i1},\ y_{i2}e)\right]=0$, 我们要证 $\sum\limits_{i=1}^n\begin{bmatrix} x_{1i}\\ ex_{2i}\end{bmatrix}\bigotimes\limits_R(y_{i1},\ y_{i2}e,)=0$. 由于

$$h\left[\sum_{i=1}^n\begin{pmatrix} x_{1i}\\ ex_{2i}\end{pmatrix}\bigotimes\quad(y_{i1},\ y_{i2}e)\right]=\sum_{i=1}^n\ \begin{bmatrix} x_{1i}\\ ex_{2i}\end{bmatrix}\quad(y_{i1},\ y_{i2}e)\ =\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^n x_{1i}y_{i1} & \sum\limits_{i=1}^n x_{1i}y_{i2}e\\ \sum\limits_{i=1}^n ex_{2i}y_{i1} & \sum\limits_{i=1}^n ex_{2i}y_{i2}e\end{bmatrix}=0.$$

于是得 $\sum\limits_{i=1}^n x_{1i}y_{i1}=\sum\limits_{i=1}^n x_{1i}y_{i2}e=\sum\limits_{i=1}^n ex_{2i}yi1=\sum\limits_{i=1}^n ex_{2i}y_{i2}e=0$. 因为

$$\sum_{i=1}^n\begin{bmatrix} x_{1i}\\ ex_{2i}\end{bmatrix}\bigotimes_R(y_{i1},\ y_{i2}e)=\sum_{i=1}^n\begin{bmatrix} x_{1i}\\ ex_{2i}\end{bmatrix}\bigotimes_R y_{i1}(1,\ 0)+\sum_{i-1}^n\begin{bmatrix} x_{1i}\\ ex_{2i}\end{bmatrix}\bigotimes_R y_{i2}e(0,\ e)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i}y_{i1} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} ex_{2i}y_{i1} \end{bmatrix} \bigotimes_R (1,\ 0) + \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_{1i}y_{i2}e \\ \sum\limits_{i=1}^{n} ex_{2i}y_{i2}e \end{bmatrix} \bigotimes_R (0,\ e)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bigotimes_R (1,\ 0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \bigotimes_R (0,\ e) = 0.$$

所以 h 是单同态，于是证明了 $R^{2\times 1} \bigotimes_R R^{1\times 2} \cong T$.

(2) 考虑下列图形

$$\begin{array}{ccc} R^{1\times 2} \times R^{2\times 1} & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & R^{1\times 2} \bigotimes\limits_T R^{2\times 1} \\ f \Big\downarrow & \swarrow h & \\ R & & \end{array},$$

其中 φ 为张量映射，我们定义 f 为： $f:\ R^{1\times 2} \times R^{2\times 1} \longrightarrow R$

$f\left[(x_1, x_2e) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ ey_2 \end{pmatrix} \right] = x_1y_1 + x_2ey_2$. 由于

$$f\left[(x_1, x_2e)\begin{pmatrix} r_1 & r_2e \\ er_3 & er_4e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ ey_2 \end{pmatrix}\right] = f\left[(x_1r_1 + x_2er_3, x_1r_2e + x_2er_4e), \begin{pmatrix} y_1 \\ ey_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= x_1r_1y_1 + x_2er_3y_1 + x_1r_2ey_2 + x_2er_4ey_2.$$

$$f\left[(x_2, x_2e), \begin{pmatrix} r_1 & r_2e \\ er_3 & er_4e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ ey_2 \end{pmatrix}\right] = f\left[(x_1, x_2e), \begin{pmatrix} r_1y_1 + r_2ey_2 \\ er_3y_1 + er_4ey_4 \end{pmatrix}\right]$$

$$= x_1(r_1y_1 + r_2ey_2) + x_2e(er_3y_1 + er_4ey_4) = x_1r_1y_1 + x_2er_3y_1 + x_1r_2ey_2 + x_2er_4ey_2.$$

故 f 是个双线性平衡映射，于是必存在 h, 使上面的图形可换，我们现在证明 h 是一个同构. 首先, 对任意的 $x \in R$, 有 $h\left[(x,\ 0) \bigotimes\limits_T \begin{pmatrix} 1 \\ e \end{pmatrix}\right] = x$. 所以 h 是满同态. 再证 h 是单同态, 也就是要证, 如果 $h\left[\sum\limits_{i=1}^{n} (x_{i1}, \quad x_{i2}e \quad) \bigotimes\limits_T \quad \begin{pmatrix} y_{1i} \\ ey_{2i} \end{pmatrix} \right] = 0$, 那么 $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_{i1}, x_{i2}e) \bigotimes\limits_T \quad \begin{bmatrix} y_{1i} \\ ey_{2i} \end{bmatrix} \quad = 0$. 由于

$$h\left[\sum_{i=1}^{n} (x_{i1}, x_{i2}e) \bigotimes_T \quad \begin{pmatrix} y_{1i} \\ ey_{2i} \end{pmatrix} \right] = \sum_{i=1}^{n} (x_{i1}y_{1i} + x_{i2}ey_{2i}) = 0,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{i1}, x_{i2}e) \bigotimes_T \begin{bmatrix} y_{1i} \\ ey_{2i} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (1,\ 0) \begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2}e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bigotimes_T \begin{bmatrix} y_{1i} \\ ey_{2i} \end{bmatrix}$$

$$= (1,\ 0) \bigotimes_T \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} (x_{i1}y_{1i} + x_{i2}ey_{2i}) \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

故 h 为单同态，也就证明了 $R^{1\times 2}\bigotimes_T R^{2\times 1}\cong R.$

3 主要结果

定理 1 设 R 为带单位元 1 的结合环， $e\in R$ 为幂等元， $T=\begin{pmatrix} R & Re \\ eR & eRe \end{pmatrix}$ 为 R 上的矩阵环，那么 Lgd$T$=Lgd$R$.

证明 (1) 先证 $\mathrm{Lgd}R\leq \mathrm{Lgd}T$.

如果 $\mathrm{Lgd}T=\infty$, 式子显然成立，不妨假设 $\mathrm{Lgd}T=m<\infty$, 任取 R- 模 A, 它必有投射分解：

$$\cdots\longrightarrow P_n\xrightarrow{d_n}P_{n-1}\longrightarrow\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow A\longrightarrow 0.$$

由于 $R^{2\times 1}$ 是投射的左 R- 模，因而是平坦的．于是有左 T- 模的投射分解：

$$\cdots\to R^{2\times 1}\bigotimes_R P_n\overset{\varepsilon\otimes d_n}{\to}R^{2\times 1}\bigotimes_R P_{n-1}\to\cdots\to R^{2\times 1}\bigotimes_R A\to 0.$$

由于 $\mathrm{Lgd}T=m$, 因此不妨令 $pd_T(R^{2\times 1}\bigotimes_R A)=m$. 故必有长度为 m 的投射分解：

$$0\to Im(\varepsilon\otimes d_m)\to R^{2\times 1}\bigotimes_R P_{m-1}\to\cdots\to R^{2\times 1}\bigotimes_R A\to 0.$$

由于 $R^{1\times 2}$ 是投射的右 T- 模，因而是平坦的．于是可得左 R- 模的投射分解：

$$0\to R^{1\times 2}\bigotimes_T I_m(\varepsilon\otimes d_m)\to R^{1\times 2}\bigotimes_T(R^{1\times 2}\bigotimes_R P_{m-1})\to\cdots\to R^{1\times 2}\bigotimes_T(R^{n\times 1}\bigotimes_R A)\to 0.$$

由于 $R^{1\times 2}\bigotimes_T(R^{2\times 1}\bigotimes_R A)=(R^{1\times 2}\bigotimes_T R^{2\times 1})\bigotimes_R A\cong R\bigotimes_R A\cong A.$

所以 $pd_R A\leq m$, 由 A 的任意性可知 $\mathrm{Lgd}R\leq\mathrm{Lgd}T$.

(2) 再证 $\mathrm{Lgd}R\geq\mathrm{Lgd}T$.

不妨令 $\mathrm{Lgd}R=m<\infty$, 任取左 T- 模 A, 作 A 的投射分解：

$$\cdots\to P_n\overset{d_n}{\to}P_{n-1}\to\cdots\to P_0\to A\to 0.$$

由于 $R^{1\times 2}$ 是投射的右 T- 模，因而平坦，于是有左 R- 模的投射分解：

$$\cdots\to R^{1\times 2}\bigotimes_T P_n\overset{\varepsilon\otimes d_n}{\to}R^{1\times 2}\bigotimes_T P_{n-1}\to\cdots\to R^{1\times 2}\bigotimes_T A\to 0.$$

由于 $\mathrm{Lgd}R=m$, 不妨令 $pd_R(R^{1\times 2}\bigotimes_T A)=m$, 于是有长度为 m 的投射分解：

$$0\to I_m(\varepsilon\otimes d_m)\to R^{1\times 2}\bigotimes_T P_{m-1}\to\cdots\to R^{1\times 2}\bigotimes_T A\to 0.$$

由于 $R^{2\times 1}$ 是投射的右 R- 模，于是有正合列：

$$0\to R^{2\times 1}\bigotimes_R I_m(\varepsilon\otimes d_m)\to R^{2\times 1}\bigotimes_R(R^{1\times 2}\bigotimes_T P_{m-1})\to\cdots\to R^{2\times 1}\bigotimes_R(R^{1\times 2}\bigotimes_T A)\to 0.$$

由于 $R^{2\times1}\bigotimes\limits_R(R^{1\times2}\bigotimes\limits_T A)=(R^{2\times1}\bigotimes\limits_R R^{1\times2})\bigotimes\limits_T A\cong T\bigotimes\limits_T A\cong A.$

所以 $pd_T A\le m$，由 A 的任意性，易得 $\mathrm{Lgd}T\le\mathrm{Lgd}R.$

所以 $\mathrm{Lgd}T=\mathrm{Lgd}R.$

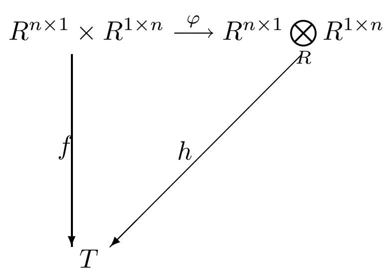
定理 2　设 R 是含单位元 1 的结合环, e 是 R 中的幂等元, $T=\begin{pmatrix} R & Re & \cdots & Re\\ eR & eRe & \cdots & eRe\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ eR & eRe & \cdots & eRe\end{pmatrix}_{n\times n}$,
那么 $\mathrm{Lgd}T=\mathrm{Lgd}R.$

证明　(1) 令 $R^{n\times1}=\begin{bmatrix} R\\ eR\\ \vdots\\ eR\end{bmatrix}$, $R^{1\times n}=(R,\ Re,\cdots Re)$, 类似引理 1 可以证明 $R^{n\times1}$ 是投射的左 T- 模，也是投射的右 R- 模，$R^{1\times n}$ 是投射的右 T- 模. 也是投射的左 R- 模.

(2) 类似引理 2, P 是左 R- 投射模，则 $R^{n\times1}\bigotimes\limits_R P$ 是投射左 T- 模，P 是左 T- 投射模，则 $R^{1\times n}\bigotimes\limits_T P$ 是投射左 R- 模.

(3) 类似引理 3, 可证：(a) $R^{n\times1}\bigotimes\limits_R R^{1\times n}\cong T$. (b) $R^{1\times n}\bigotimes\limits_T R^{n\times1}\cong R.$

现简证 (a) 如下，考虑下列图形：



我们重点证明一下 h 是同构映.

对任意 $\gamma=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12}e & \cdots & x_{1n}e\\ ex_{21} & ex_{22}e & \cdots & ex_{2n}e\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ex_{n1} & ex_{n2}e & \cdots & ex_{nn}e\end{bmatrix}\in T$, 由于

$$\gamma=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12}e & \cdots & x_{1n}e\\ ex_{21} & ex_{22}e & \cdots & ex_{2n}e\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ex_{n1} & ex_{n2}e & \cdots & ex_{nn}e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11}\\ ex_{21}\\ \vdots\\ ex_{n1}\end{bmatrix}(1,\ 0,\cdots 0)+$$

$$\begin{bmatrix} x_{12}\\ ex_{22}\\ \vdots\\ ex_{n2}\end{bmatrix}(0,\ e,\cdots 0)+\cdots+\begin{bmatrix} x_{1n}\\ ex_{2n}\\ \vdots\\ ex_{nn}\end{bmatrix}(0,\ 0,\cdots e),$$

$$h\left[\begin{pmatrix} x_{11} \\ ex_{21} \\ \vdots \\ ex_{n1} \end{pmatrix} \bigotimes_R (1,\ 0,\cdots 0) + \begin{pmatrix} x_{12} \\ ex_{22} \\ \vdots \\ ex_{n2} \end{pmatrix} \bigotimes_R (0,\ e,\cdots 0) + \cdots + \begin{pmatrix} x_{1n} \\ ex_{2n} \\ \vdots \\ ex_{nn} \end{pmatrix} \bigotimes_R (0,\ 0,\cdots e)\right] = \gamma.$$

证明了 h 是满同态.

由

$$h\left[\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ ex_{2i} \\ \vdots \\ ex_{ni} \end{pmatrix} \bigotimes_R (y_{i1}, y_{i2}e\cdots y_{in}e)\right] = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ ex_{2i} \\ \vdots \\ ex_{ni} \end{bmatrix} (y_{i1}, y_{i2}e\cdots y_{in}e)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_{i2}e & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_{in}e \\ \sum_{i=1}^{n} ex_{2i}y_{i1} & \sum_{i=1}^{n} ex_{2i}y_{i2}e & \cdots & \sum_{i=1}^{n} ex_{2i}y_{in}e \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n} ex_{ni}y_{i1} & \sum_{i=1}^{n} ex_{ni}y_{i2}e & \cdots & \sum_{i=1}^{n} ex_{ni}y_{in}e \end{bmatrix} = 0,$$

可得

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_{i1} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_{i2}e = \cdots = \sum_{i=1}^{n} ex_{ni}y_{in}e = 0.$$

又由于

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ ex_{2i} \\ \vdots \\ ex_{ni} \end{bmatrix} \bigotimes_R (y_{i1}, y_{i2}e\cdots y_{in}e) = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ ex_{2i} \\ \vdots \\ ex_{ni} \end{bmatrix} \bigotimes_R y_{i1}(1,\ 0,\cdots 0) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ ex_{2i} \\ \vdots \\ ex_{ni} \end{bmatrix} \bigotimes_R y_{i2}e(0,\ e,\cdots 0) + \cdots + \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} x_{1i} \\ ex_{2i} \\ \vdots \\ ex_{ni} \end{bmatrix} \bigotimes_R y_{in}e(0,\ 0,\cdots e)$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} ex_{2i}y_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} ex_{ni}y_{i1} \end{bmatrix} \bigotimes_R (1, 0,\cdots 0) + \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_{i2}e \\ \sum_{i=1}^{n} ex_{2i}y_{i2}e \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} ex_{ni}y_{i2}e \end{bmatrix} \bigotimes_R (0,\ e,\cdots 0) + \cdots +$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_{in}e \\ \sum_{i=1}^{n} ex_{2i}y_{in}e \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} ex_{ni}y_{in}e \end{bmatrix} \bigotimes_R (0,\ 0,\cdots e) = 0.$$

这就证明了 h 是单射. 于是 h 是同构. 其余证明与定理 1 完全类似. 故省略.

推论 设 R 是含单位元 1 的结合环, 那么 $\mathrm{Lgd}M_n(R) = \mathrm{Lgd}R$.

证明 1 是 R 的幂等元, 由定理 2 结论成立.

设 $K_0(R)$ 为环 R 的 Grothendieck 群, 利用本文提供的方法, 我们还能够证明 $K_0(R) \cong K_0(T)$.

参考文献:

[1] MCCONNEL J, ROBSON J. *Noncommutative Noetherian Rings* [M]. Jahn Wiley& Sons, New York, 1998, 85–92.

[2] ANDERSON F W, FULLER K R. *Rings and Categories of Modules* [M]. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.

[3] 周伯埙. 同调代数 [M]. 北京: 科学出版社, 1998.
ZHOU Bo-xun. *Homological Algebra* [M]. Beijing: Science Press, 1998. (in Chinese)

[4] 欧阳伦群. $\mathrm{Lgd}R$=$\mathrm{Lgd}M_n(R)$ 的新证法 [J]. 湖南师范大学社会科学学报, 2002, **32**: 294–297.
OUYANG Lun-qun. *A new method of proving* $\mathrm{Lgd}R = \mathrm{Lgd}M_n(R)$ [J]. J. Social Science of Hunan Normal University, 2002, **32**: 294–297. (in Chinese)

The Homological Dimensions of Some Morita Contexts

OUYANG Lun-qun
(Dept. of Math., Hunan Science and Technology University, Xiangtan 411201, China)

Abstract: In this paper, we obtain the equivalent relations of the global dimensions of some Morita Contexts and of ring R. And the results are extended to $n \times n$ matrix rings.

Key words: global dimension; projective module; matrix ring.