第15卷 第6期　　　　自　动　化　学　报　　　　Vol. 15, No. 6
1989年11月　　　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　　　Nov., 1989

模糊关系系统的反馈控制

徐　承　伟
（昆明工学院自控系）

摘　　要

以开环系统模糊关系模型为基础，讨论了模糊关系系统反馈控制器的设计．给出了一种反馈控制律，分析了闭环系统的若干性质．提出的反馈控制律便于实施，且同时适用于跟踪及调节问题．

关键词——模糊关系系统，反馈，控制器设计．

在模糊控制技术得到了若干成功的工业应用[1-3]之后，从理论上分析模糊控制系统的要求变得日益迫切起来[4-6]．

本文研究模糊关系系统的反馈控制问题．考虑开环模糊系统

$$y_t = y_{t-d_1} \circ u_{t-d_2} \circ R_p, \tag{1}$$

其中 y_t 和 u_t 分别是 t 时刻的输出和输入模糊变量，R_p 是模糊关系，“$\circ$”是 max-min 合成算子． 相应的论域记为 Y 和 U，于是 $y_t \in F(Y)$，$u_t \in F(U)$，$R_p \in F(Y \times Y \times U)$，这儿 $y_t \in F(Y)$ 表“y_t 是定义在 Y 上的模糊集合”，$Y \times Y \times U$ 表三者的笛卡尔积集．本文中，论域都是离散的，且有相同的元素个数，即 $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$，$U = \{u_1, \cdots, u_n\}$．Y 的一般元素有时也记作 y 或 x，U 的一般元素有时也记为 u． y_t 和 u_t 的隶属函数记为 $y_t(x)$ 和 $u_t(u)$，R_p 的隶属函数记为 $R_p(y,x,u)$．在上述约定之下，开环系统 (1) 等价于它的隶属函数表达式

$$y_t(y) = \overset{xu}{\vee}\left(y_{t-d_1}(x) \wedge u_{t-d_2}(u) \wedge R_p(y,x,u)\right), \forall y \in Y. \tag{2}$$

这儿 $\vee = \max$，$\wedge = \min$．

今考虑如下形式的反馈控制器，

$$u_t = f(v_{t+d_2}, y_{t+d_2-d_1}, R_p). \tag{3}$$

其中 $f(\cdot)$ 表达了待定的控制律，$v_t \in F(Y)$ 表 t 时刻的参考输入（设定值），v_t 的隶属函数记为 $v_t(y)$．显然．(3) 也可以表达为隶属函数形式

$$u_t(u) = f(v_{t+d_2}(y),\ y_{t+d_2-d_1}(x),\ R_p(y,x,u)). \tag{4}$$

把控制器 (3) 代入开环系统 (1) 即得闭环系统

$$y_t = y_{t-d_1} \circ f(v_t,\ y_{t-d_1},\ R_p) \circ R_p. \tag{5}$$

此时反馈控制问题提法如下，给定 R_p 及 $d_1 > 0$，$d_2 > 0$，确定控制律 $f(\cdot)$，使得 y_t

本文于1987年6月12日收到．

在将要论及的意义下等于 $\underline{v}_t$, $\forall t$. $f(\cdot)$ 物理可实现的必要条件是 $d_2 \leqslant d_1$, 且 $\underline{v}_{t+d_2}$ 在 t 时刻已知. 下面逐步确立反馈控制律.

定义 1 系统 (1) 称为 t 时刻在 $y=y_i$ 处 r_0- 可达, 如果 $\forall\ \underline{y}_{t-d_1}$, $\exists\ \underline{u}_{t-d_2}$, 使得

$$\underline{y}_t(y_i) \geqslant r_0,\quad r_0 \in [0,1]. \tag{6}$$

定义 2 系统 (1) 称为 t 时刻 r_0-可达, 如果它 t 时刻在 $y=y_i$ 处 r_0-可达 $\forall i \in \bar{n}$ 成立. $\bar{n} \triangleq \{1,\cdots,n\}$. (7)

定理 1 系统 (1) t 时刻 r_0- 可达的充分必要条件为(证明略)

(i) $\exists x \in Y$, $\underline{y}_{t-d_1}(x) \geqslant r_0$, 且

(ii) $\forall y$, $x \in Y$, $\exists u$, $R_p(y,x,u) \geqslant r_0$. (8)

定义 3 系统 (1) 称 r_0- 可达,如果它在所有 t 上都 r_0- 可达.

定义 4 设 X 为一论域, $x \in X$, $\underline{x} \in F(X)$, $\underline{x}(x)$ 表 $\underline{x}$ 的隶属函数, 则 $\underline{x}$ 被称为 r_0- 正规的模糊集合, iff

$$\exists!\, x_0 \in X, \underline{x}(x_0) \geqslant r_0 \text{ 且 } \underline{x}(x) < r_0\ \ \forall x \in X,\ x \neq x_0, \tag{9}$$

此处 iff = 当且仅当, $\exists!$ = 存在且仅存在一个.

推论 1 若 $\underline{y}_{t-d_1}$ r_0- 正规, 则系统 (1) r_0-可达 $\Longleftrightarrow$ 式 (8) 成立. 此时称 "R_p 是 r_0-可达的"(证明: 由定理 1 显然).

定义 5 R_p 在 $Y \times Y$ 上的投影记为 R, 即

$$R = \mathrm{proj}(R_p; Y, Y) \in F(Y \times Y). \tag{10}$$

R 的隶属度记为 $R(y_i, x_j)$ 或 r_{ij}, $i,j \in \bar{n}$. (10) 等价于

$$\begin{aligned} r_{ij} = R(y_i, x_j) &= \max_{u_k} R_p(y_i, x_j, u_k) \\ &= R_p(y_i, x_j, u_{k_{ij}}), k_{ij} \in \bar{n},\ \forall i,j \in \bar{n}. \end{aligned} \tag{11}$$

进一步假定对每一组 (i,j), k_{ij} 唯一, 即对任意 $i,j \in \bar{n}$, $\exists!\, u_{k_{ij}}$, 使得

$$R_p(y_i, x_j, u_{k_{ij}}) > R_p(y_i, x_j, u)\ \ \forall u \in U,\ u \neq u_{k_{ij}}. \tag{12}$$

推论 2 若 $R_p r_0$- 可达, 则

$$\forall i,j \in \bar{n},\ r_{ij} \geqslant r_0. \tag{13}$$

定义 6 定义

$$R_{\cdot l} \triangleq \underline{y}_{t-d_1} \circ R, l \in \bar{n}. \tag{14}$$

定理 2 若 $\underline{y}_{t-d_1}$ r_0- 正规, 且 $hgt(\underline{y}_{t-d_1}) \triangleq \max\limits_{x} \underline{y}_{t-d_1}(x) = \underline{y}_{t-d_1}(x_l)$, 则

$$R_{\cdot l}(y_i) = r_{il},\ i = 1, n. \tag{15}$$

(证明略).

假定 1 对任意 $l \in \bar{n}$,

$$u_{k_{il}} \neq u_{k_{jl}},\ i,j \in \bar{n}\quad i \neq j. \tag{16}$$

这一假定意味着, $\underline{y}_{t-d_1}$ 一定时, $\mathrm{hgt}(\underline{y}_t)$ 与 $\mathrm{hgt}(\underline{u}_{t-d_2})$ 对应的元素 $(y_i,\ u_{k_{il}})$ 之间存在单一对应关系; 或者说, 在给定的 $\underline{y}_{t-d_1}$ 之下, 因 $(\underline{u}_{t-d_2})$ 与果 $(\underline{y}_t)$ 之间存在某种单一对应关系.

定理 3 在假定 1 之下, 若 R_p r_0- 可达, $\underline{y}_{t-d_1}$ 和 $\underline{u}_{t-d_2}$ 都是 r_0- 正规的, 且

$$\mathrm{hgt}(\underline{y}_{t-d_1}) = \underline{y}_{t-d_1}(x_l),\ \mathrm{hgt}(\underline{u}_{t-d_2}) = \underline{u}_{t-d_2}(u_{k_{il}}),$$

则由 (1) 导出的 $\underline{y}_t$ 满足 $\mathrm{hgt}(\underline{y}_t)=\underline{y}_t(y_i)\geqslant r_0$，且 $\underline{y}_t r_0$- 正规(证明略).

定义 7

$$R_1 \triangleq R_{\cdot l}\cap \underline{v}_t \in F(Y). \tag{17}$$

定理 4　R_1 是 r_0- 正规的，如果 $R_p r_0$- 可达，且 $\underline{v}_t r_0$- 正规(证明略).

定理 5　(证明略). 设 $R_p r_0$- 可达，$\underline{y}_{t-d_1}$ 和 $\underline{v}_t r_0$- 正规，如果选择 $\underline{u}_{t-d_2}$ 为

$$\underline{u}_{t-d_2}(u)=\begin{cases}R_1(y_i) & u=u_{k_il},\quad i=1,n\\ 0 & \text{其它.}\end{cases} \tag{18}$$

那么 $\underline{u}_{t-d_2}$ 是 r_0- 正规的，且此时由 (1) 确定的 (r_0- 正规的) $\underline{y}_t$ 满足 $\mathrm{hgt}(\underline{y}_t)=\underline{y}_t(y_m)$ 当 $\mathrm{hgt}(\underline{v}_t)=\underline{v}_t(y_m)$.

至此，已可能为控制律 $f(\cdot)$ 的确定勾划出一个清晰的轮廓. 如果开环系统 r_0-可达，且假定 1 成立，那么可以按下述方式根据 R_p 及 (r_0- 正规的) $\underline{y}_{t+d_2-d_1}$，$\underline{v}_{t+d_2}$ 确定 $\underline{u}_t$:

(i) 由 (10) 计算 R;

(ii) 由

$$R_{\cdot l}=\underline{y}_{t+d_2-d_1}\circ R. \tag{19}$$

计算 $R_{\cdot l}$;

(iii) 由

$$R_l=R_{\cdot l}\cap \underline{v}_{t+d_2}. \tag{20}$$

计算 R_l;

(iv) 由

$$\underline{u}_t(u)=\begin{cases}R_l(y_i) & u=u_{k_il},\quad i=1,n\\ 0 & \text{其它.}\end{cases} \tag{21}$$

确定 $\underline{u}_t$，其中 u_{k_ij} 由 (11) 定义.

按 (i)—(iv) 产生的 $\underline{u}_t$ 将 a) 是 r_0-正规的; b) 产生出 r_0- 正规的 $\underline{y}_{t+d_2}$，c) 使 $\mathrm{hgt}(\underline{y}_{t+d_2})=\underline{y}_{t+d_2}(y_m)$，如果 $\mathrm{hgt}(\underline{v}_{t+d_2})=\underline{v}_{t+d_2}(y_m)$.

r_0- 正规的模糊集合易于做非模糊化处理，这为上述算法之实施带来便利.

讨论 1. 若 R_p 时变，可以仿照自校正控制，在线辨识 R_p，再用 (i)—(iv) 设计控制律.

讨论 2. 由 (i)—(iv) 给出的控制律同样适用于跟踪 ($\underline{v}_t\neq$ 常数)和调节 ($\underline{v}_t=$ 常数)问题. 当 R_p 时不变且 $\underline{v}_t=$ 常数时，算法尚可简化.

讨论 3. 虽然讨论中假定 $|Y|=|U|=n$，但所得结论显然也适用于 $|Y|\neq|U|$ 的情形.

讨论 4. 当假定 1 不满足时，$\underline{u}_t$ 将不是 r_0-正规的. 此时可以把控制作用(标量)取在诸 u_{k_ml} 的平均值上.

讨论 5. 定义 1 是一种变形的“一步可达”定义，当系统 $k(>1)$ 步可达时，如何设计反馈控制律值得进一步研究. 此外，还可以进一步研究前馈+反馈型的控制律.

参 考 文 献

[1] Mandic, N. J., Scharf, E. M. and Mamdani, E. H., Practical Application of a Heuristic Fuzzy-Rule Based Controller to the Dynamic Control of a Robot Arm. IEE Proc. 132, Pt. D, No. 4(1985).
[2] Holmblad, L. P. and Ostergarrd, J. J., Control of a Cement Kiln by Fuzzy Logic. In "Fuzzy Information and Decision Processes", Gupta, M. M. and Sanchez, E. eds., North-Holland, 1982.
[3] King, P. J. and Mamdani, E. H., The application of fuzzy control systems to industrial processes. *Automatica* **13**(1977), 235—42.
[4] Kickert, W. J. M. and Mamdani, E. H., Analysis of fuzzy logic controller. *Fuzzy Sets and Systems* **1** (1978), 29—44.
[5] Tong, R. M., Analysis and control of fuzzy systems using finite discrete relations. *Int. J. Control* **27** (1978), 431—40.
[6] ——————, Some properties of fuzzy feedback systems. *IEEE Trans.*, **SMC-10**(1980), No.6.

FEEDBACK CONTROL OF FUZZY RELATIONAL SYSTEMS

Xu Chengwei
(*Kunming Institute of Technology*)

Abstract

Based on the fuzzy relational model of the open-loop system, the design of a fuzzy feedback controller is discussed. A fuzzy feedback control law is presented, and some properties of the resulted closed-loop system are analysed. The proposed fuzzy feedback control strategy is easy to implement. Tracking and regulation problems can both be treated by the proposed method.

Key words ——Fuzzy relational systems; feedback; controller design.