第27卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.27, No.4
2007年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 2007

文章编号: 1000-341X(2007)04-0693-04 **文献标识码**: **A**

Mersenne 数 M_p 都是孤立数

李 伟 勋
(茂名学院数学系, 广东 茂名 525000)
(E-mail: liweixun@163.com)

摘　要: 设 p 是素数, $M_p=2^p-1$. 本文证明了 M_p 都是孤立数.

关键词: Mersenne 数; 相亲数; 孤立数.
MSC(2000): 11A25; 11A41; 11N05
中图分类: O156.1

对于正整数 a, 设 $\sigma(a)$ 是 a 的所有不同正约数之和. 如果两个正整数 a 和 b 满足

$$\sigma(a)=\sigma(b)=a+b, \tag{1}$$

则称 (a,b) 是一对相亲数 (amicable pair). 相反, 如果对于给定的 a, 不存在任何正整数 b 适合 (1) 式, 则称 a 是一个孤立数 (anti-sociable number). 由于当一对相亲数 (a,b) 适合 $a=b$ 时, a 就是著名的完全数 (perfect number), 所以相亲数与孤立数一直是数论中的一个引人关注的课题 [1−2]. 2000 年, Luca[3] 证明了: Fermat 数都是孤立数. 本文将证明另一类重要的正整数也是孤立数.

设 p 是奇素数, 又设

$$M_p=2^p-1. \tag{2}$$

如此的 M_p 称为 Mersenne 数, 它在数论的经典问题和现代应用中有着重要地位. 本文给出了 Mersenne 数的以下性质:

定理　Mersenne 数 M_p 都是孤立数.

上述定理的证明要用到下列引理.

引理 1　当是 $a=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\cdots p_k^{\gamma_k}$ 是 a 的标准分解式时,

$$\sigma(a)=\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{\gamma_{i+1}}-1}{p_i-1}.$$

证明　参见文献 [4] 的定理 1.9.1.

引理 2　当 $a>2$ 时,

$$\frac{\sigma(a)}{a}<1.8\log\log a+\frac{2.6}{\log\log a}.$$

证明　参见文献 [5].

收稿日期: 2006-09-03; **接受日期**: 2007-01-19
基金项目: 国家自然科学基金 (10271104); 广东省自然科学基金 (04011425); 茂名学院科学研究基金 (201076).

引理 3 对于奇素数 p, Mersenne 数 M_p 的素因数 q 都满足 $q \equiv 1 \pmod{2p}$.

证明 参见文献 [6] 的推论 6.1.4.

引理 4 当 x 是小于 1 的正数时，必有

$$\frac{2}{3}x < \log(1+x) < x.$$

证明 如果 $\log(1+x) \geq x$, 则有

$$1+x \geq e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} > 1+x, \quad x > 0$$

这一矛盾，故必有 $\log(1+x) < x$.

如果 $\frac{2x}{3} \geq \log(1+x)$, 则有

$$\frac{2}{3}x \geq \log(1+x) = \frac{2x}{2+x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(\frac{x}{2+x})^{2n} > \frac{2x}{2+x}. \tag{3}$$

从 (3) 式可得 $x > 1$ 这一矛盾，故必有 $\frac{2x}{3} < \log(1+x)$. 证毕. □

引理 5 对于正整数 a, 必有

$$\sum_{m=1}^{a}\frac{1}{m} \leq 1+\log a.$$

证明 设

$$S(a) = \sum_{m=1}^{a}\frac{1}{m}.$$

当 $a = 1$ 时，本引理显然成立.

当 $a > 1$ 时，假设本引理对 $a-1$ 成立，则有

$$S(a-1) \leq 1+\log(a-1). \tag{4}$$

如果 $S(a-1) > 1+\log a$, 则有

$$S(a) = S(a-1)+\frac{1}{a} > 1+\log a. \tag{5}$$

结合 (4) 和 (5) 式可得

$$\frac{1}{a} > \log(1+\frac{1}{a-1}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(a-1)^n} > \frac{1}{a-1}-\frac{1}{2(a-1)^2}. \tag{6}$$

从 (6) 式可得 $a < 2$ 这一矛盾，因此 $S(a) \leq 1+\log a$. 由归纳法可知本引理成立. 证毕. □

引理 6 素数都是孤立数.

证明 设 p 是素数. 如果 p 不是孤立数，则有正整数 b 可使

$$\sigma(p) = \sigma(b) = p+b \tag{7}$$

由于 $\sigma(p) = p + 1$, 故从 (7) 式可知 $b = 1$. 然而，因为 $\sigma(1) = 1$, 所以从 (7) 式可知这是不可能的. 因此 p 必为孤立数. 证毕. □

定理的证明 设

$$M_p = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k} \tag{8}$$

是 Mersenne 数 M_p 的标准分解式，其中 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ 是适合

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_k \tag{9}$$

的素数， $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ 是适当的正整数. 根据引理 3 可知

$$p_i \equiv 1 \pmod{2p}, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{10}$$

由 (9) 和 (10) 式可得

$$p_i \geq 2ip + 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{11}$$

$$2^p > M_p \geq p_1 p_2 \cdots p_k \geq (2p+1)^k > (2p)^k. \tag{12}$$

由 (12) 式得

$$k < \frac{p \log 2}{\log 2p}. \tag{13}$$

由于已知当 $p < 11$ 时， M_p 都是素数，所以根据引理 6 可知此时 M_p 都是孤立数. 因此，假如 M_p 不是孤立数，则有

$$p \geq 11. \tag{14}$$

此时，从 (1) 式可知存在正整数 b 适合

$$\sigma(M_p) = \sigma(b) = M_p + b. \tag{15}$$

根据引理 1, 从 (8) 和 (15) 式可知

$$\begin{aligned} 1 + \frac{b}{M_p} = \frac{\sigma(M_p)}{M_p} &= \prod_{i=1}^{k} (1 + \frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_i^{\gamma_i}}) \\ &< \prod_{i=1}^{k} (\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^j}) = \prod_{i=1}^{k} (1 + \frac{1}{p_i - 1}). \end{aligned} \tag{16}$$

再根据引理 4 和引理 5, 从 (11), (13) 和 (16) 式可得

$$\begin{aligned} \log(1 + \frac{b}{M_p}) &< \log \prod_{i=1}^{k} (1 + \frac{1}{p_i - 1}) = \sum_{i=1}^{k} \log(1 + \frac{1}{p_i - 1}) < \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i - 1} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2ip} \\ &= \frac{1}{2p}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{2p}(1 + \log k) < \frac{1}{2p}(1 + \log p + \log\log 2 - \log\log 2p). \end{aligned} \tag{17}$$

结合 (14) 和 (17) 式可知

$$M_p > b, \tag{18}$$

并且根据引理 4, 从 (17) 式可得

$$\frac{2b}{3M_p} < \frac{1}{2p}(1 + \log p + \log\log 2 - \log\log 2p). \tag{19}$$

另一方面，根据引理 2, 从 (14), (15) 和 (18) 式可知

$$\begin{aligned} 1 + \frac{M_p}{b} = \frac{\sigma(b)}{b} &< 1.8\log\log b + \frac{2.6}{\log\log g} < 1.8\log\log M_p + \frac{2.6}{\log\log M_p} \\ &< 1.8\log\log M_p + 1 < 1.8(\log p + \log\log 2) + 1. \end{aligned} \tag{20}$$

由 (20) 式得

$$\frac{M_p}{b} < 1.8(\log p + \log\log 2). \tag{21}$$

结合 (19) 和 (21) 式可知

$$p < 1.35(\log p + \log\log 2)(1 + \log p + \log\log 2 - \log\log 2p) < 1.35(\log p)^2. \tag{22}$$

然而，从 (22) 式可得 $p = 2$, 这与 (14) 式矛盾．由此可知 Mersenne 数 M_p 都是孤立数．定理证毕. □

参考文献：

[1] GUY R K. *Unsolved Problems in Number Theory* [M]. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.

[2] YAN Song-yuan. *2500 years in the search for amicable numbers* [J]. Adv. Math. (China), 2004, **33**(4): 385–400.

[3] LUCA F. *The anti-social Fermat numbers* [J]. Amer. Math. Monthly, 2000, **107**(2): 171–173.

[4] 华罗庚．数论导引 [M]. 北京：科学出版社， 1979.
HUA Luo-geng. *An Introduction to Number Theory* [M]. Beijing: Science Press, 1979. (in Chinese)

[5] ROSSER J B, SCHOENFELD L. *Approximate formulas for some functions of prime numbers* [J]. Illinois J. Math., 1962, **6**: 64–94.

[6] 乐茂华．初等数论 [M]. 广州：广东高等教育出版社， 1999.
LE Mao-hua. *Number Theory Of Elementary* [M]. Guangzhou: Guangdong Higher Education Press, 1999. (in China)

All Mersenne Numbers Are Anti-Sociable Numbers

LI Wei-xun
(Department of Mathematics, Maoming University, Guangdong 525000, China)

Abstract: Let p be a prime, and let $M_p = 2^p - 1$. This paper proves that M_p is an anti-sociable number.

Key words: Mersenne number; amicable pair; anti-sociable number.