第 20 卷 第 5 期　　自动化学报　　Vol. 20, No. 5
1994 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sep., 1994

短文

连续时间线性等式约束 LQ 控制的混合能消元算法[1)]

邓子辰
(西北工业大学 504 教研室　西安　710072)

摘　　要

将连续时间 LQ 控制问题的微分方程离散化后，建立了连续时间线性等式约束 LQ 控制问题的混合能消元算法，可有效求解约束条件下的 Riccati 方程. 文中给出了相应的算例.

关键词: LQ 控制，混合能，Riccati 方程.

1　引言

计算结构力学与最优控制模拟关系的建立[1]，为两门学科之间的相互交流打下了基础. 文献[2]提出了连续时间有限区段的混合能矩阵的微分方程及其解法. 文献[3]提出了 LQ 控制问题与结构力学中的子结构串理论，认为柱形域椭圆型偏微分方程半解析法的理论与方法是可以相互模拟的. 本文在已有工作的基础上，处理连续时间线性等式约束的 LQ 控制问题.

2　离散 LQ 控制问题的混合能消元算法

定常离散 LQ 控制问题的动力学方程及相应的价值泛函分别为

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \Phi \boldsymbol{x}_k + \Gamma \boldsymbol{u}_k, \quad \boldsymbol{x}_0 = \text{给定向量}, \tag{1}$$

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_f^{\mathrm{T}} S_f \boldsymbol{x}_f + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{k_f-1}(\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} Q \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u}_k^{\mathrm{T}} R \boldsymbol{u}_k). \tag{2}$$

上两式中各符号说明见文献[1].

设线性约束方程为

$$C_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{u}_k) = C_x \boldsymbol{x}_k + C_u \boldsymbol{u}_k + C_0 = 0. \tag{3}$$

价值泛函分别对方程(1),(3)引入 Lagrange 乘子向量 $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ 和 $\boldsymbol{\nu}_k$，并根据极大值

1) 航空科学青年基金(编号为 Q93B5304) 及国家自然科学基金(编号为 1924001)资助项目.
本文于 1992 年 12 月 14 日收到

原理求得 $\boldsymbol{u}_k$ 后,可进一步得到

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \Phi \boldsymbol{x}_k - G\boldsymbol{\lambda}_{k+1} - C_\lambda^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\nu}_k, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = Q\boldsymbol{x}_k + \Phi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{k+1} + C_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nu}_k, \tag{5}$$

$$C_x\boldsymbol{x}_k - C_\lambda\boldsymbol{\lambda}_{k+1} - C_\nu\boldsymbol{\nu}_k + C_0 = 0. \tag{6}$$

其中 $G = \Gamma R^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}$, $C_\lambda = C_u R^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}$, $C_\nu = C_u R^{-1} C_u^{\mathrm{T}}$.

现考虑两个连续时段 $(k-1,k)$ 和 $(k,\ k+1)$ 的消元. 考虑到线性约束的作用,这时时段 $(k-1,k)$,$(k,k+1)$ 及合并后的时段 $(k-1,k+1)$的混合能算式分别为

$$V_1(\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{\lambda}_k,\boldsymbol{\nu}_{k-1}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}_k^{\mathrm{T}} G\boldsymbol{\lambda}_k - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_{k-1}^{\mathrm{T}} Q\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{\lambda}_k^{\mathrm{T}}\Phi\boldsymbol{x}_{k-1}$$
$$+ \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}_{k-1}^{\mathrm{T}} C_\nu \boldsymbol{\nu}_{k-1} - \boldsymbol{\nu}_{k-1}^{\mathrm{T}} C_x \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{\nu}_{k-1}^{\mathrm{T}} C_\lambda \boldsymbol{\lambda}_k, \tag{7}$$

$$V_2(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{\lambda}_{k+1},\boldsymbol{\nu}_k) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}_{k+1}^{\mathrm{T}} G\boldsymbol{\lambda}_{k+1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} Q\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^{\mathrm{T}}\Phi\boldsymbol{x}_k$$
$$+ \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}_k^{\mathrm{T}} C_\nu \boldsymbol{\nu}_k - \boldsymbol{\nu}_k^{\mathrm{T}} C_x \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{\nu}_k^{\mathrm{T}} C_\lambda \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \tag{8}$$

$$V_c(\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{\lambda}_{k+1},\ \boldsymbol{\nu}_{k-1}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}_{k+1}^{\mathrm{T}} G_c\boldsymbol{\lambda}_{k+1} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_{k-1}^{\mathrm{T}} Q_c\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^{\mathrm{T}}\Phi_c\boldsymbol{x}_{k-1}$$
$$+ \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu}_{k-1}^{\mathrm{T}} C_{\nu c} \boldsymbol{\nu}_{k-1} - \boldsymbol{\nu}_{k-1}^{\mathrm{T}} C_{xc} \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{\nu}_{k-1}^{\mathrm{T}} C_{\lambda c} \boldsymbol{\lambda}_{k+1}. \tag{9}$$

对应于式(7)—(9),分别存在[1]

$$\delta V_1 = -\boldsymbol{\lambda}_{k-1}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\lambda}_k, \tag{10}$$

$$\delta V_2 = -\boldsymbol{\lambda}_k^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \tag{11}$$

$$\delta V_c = -\boldsymbol{\lambda}_{k-1}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x}_{k-1} - \boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\lambda}_{k+1}. \tag{12}$$

方程(10)和(11)相加,同时注意到 $\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{\lambda}_k + \boldsymbol{\lambda}_k^{\mathrm{T}}\delta\boldsymbol{x}_k = \delta(\boldsymbol{\lambda}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_k)$, 进一步推导,可得

$$Q\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{\lambda}_k = -\Phi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{k+1} - C_x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nu}_k, \tag{13}$$

$$-\boldsymbol{x}_k - G\boldsymbol{\lambda}_k = -\Phi\boldsymbol{x}_{k-1} + C_\lambda^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\nu}_{k-1}, \tag{14}$$

$$C_x\boldsymbol{x}_k - C_\lambda\boldsymbol{\lambda}_{k+1} - C_\nu\boldsymbol{\nu}_k = 0. \tag{15}$$

求出 $\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{\lambda}_k$ 和 $\boldsymbol{\nu}_k$ 后,代入式(10)—(12),可得下列消元公式

$$Q_c = Q + \Phi^{\mathrm{T}}(I+QG)^{-1}Q\Phi + \Phi^{\mathrm{T}}(I+QG)^{-1}C_x^{\mathrm{T}}K^{-1}C_x(I+QG)^{-\mathrm{T}}\Phi, \tag{16}$$

$$G_c = G + \Phi(I+GQ)^{-1}\Phi - [C_\lambda + C_x(I+GQ)^{-1}G\Phi^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}K^{-1}[C_\lambda$$
$$+ C_x(I+GQ)^{-1}G\Phi^{\mathrm{T}}], \tag{17}$$

$$\Phi_c = \Phi(I+QG)^{-\mathrm{T}}\Phi - \Phi(I+GQ)^{-1}GC_x^{\mathrm{T}}K^{-1}C_x(I+QG)^{-\mathrm{T}}\Phi$$
$$- C_\lambda^{\mathrm{T}}K^{-1}C_x(I+QG)^{-\mathrm{T}}\Phi, \tag{18}$$

$$C_{\nu c} = C_\nu - C_\lambda[(I+QG)^{-1}Q + (I+QG)^{-1}C_x^{\mathrm{T}}K^{-1}C_x(I+QG)^{-\mathrm{T}}]C_\lambda^{\mathrm{T}}, \tag{19}$$

$$C_{xc} = C_x - C_\lambda[(I+QG)^{-1}Q + (I+QG)^{-1}C_x^{\mathrm{T}}K^{-1}C_x(I+QG)^{-\mathrm{T}}]\Phi, \tag{20}$$

$$C_{\lambda c} = C_\lambda[(I+QG)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}} - (I+QG)^{-1}C_x^{\mathrm{T}}K^{-1}C_x(I+QG)^{-\mathrm{T}}G\Phi^{\mathrm{T}}$$
$$- (I+QG)^{-1}C_x^{\mathrm{T}}K^{-1}C_\lambda]. \tag{21}$$

其中 $K = C_\nu + C_x(I+GQ)^{-1}GC_x^{\mathrm{T}}.$ (22)

3 有约束的代数 Riccati 方程

式(16)—(21)在迭代收敛时

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_c\to 0,\ C_{\lambda c}\to 0,\ C_{xc}\to C,\\&Q_c\to S,\ G_c\to T,\ C_{vc}\to D.\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

将上述极限解前面再加一个时段,利用上节消元公式,并进行简化,得

$$Q-S+\Phi^{\mathrm T}(S^{-1}+G)^{-1}\Phi+C^{\mathrm T}D^{-1}C=0,\tag{24}$$

$$D=C_v-C_\lambda(S^{-1}+G)^{-1}C_\lambda^{\mathrm T},\tag{25}$$

$$C=C_x-C_\lambda(S^{-1}+G)^{-1}\Phi.\tag{26}$$

等式约束下的代数 Riccati 方程由(24)—(26)组成,解为 S,为正向解.

同理设 $\boldsymbol{x}=-T\boldsymbol{\lambda}$,其中 T 为对称正定阵. 用上述方法,同样可得到逆向时间的代数 Riccati 方程.

4 连续问题的离散化及迭代公式的建立

连续时间 LQ 控制的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=F\boldsymbol{x}-G_r\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{x}_0=\text{给定向量},\tag{27}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-Q\boldsymbol{x}-F^{\mathrm T}\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\lambda}\to 0(t\to\infty\text{时}),\tag{28}$$

式中符号说明见文献[1].

线性约束方程为

$$C_x\boldsymbol{x}+C_u\boldsymbol{u}+C_0=0.\tag{29}$$

对方程(27),(28)进行离散化,得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}_{k+1}=(I+F\Delta t)\boldsymbol{x}_k-G_r\Delta t\boldsymbol{\lambda}_{k+1},\\&\boldsymbol{\lambda}_k=Q\Delta t\boldsymbol{x}_k+(I+F^{\mathrm T}\Delta t)\boldsymbol{\lambda}_{k+1}.\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

此方程组与离散 LQ 控制的对偶方程比较,可知 $I+F\Delta t$ 相对应于 Φ, $G_r\Delta t$ 对应于 G, $Q\Delta t$ 对应于 Q.

利用离散情况下的消元公式,令

$$Q'=Q\Delta t,\ G'=G_r\Delta t,\ \Phi'=F\Delta t.\tag{31}$$

这时

$$\begin{aligned}Q_c=&Q'+(I+\Phi')^{\mathrm T}(I+Q'G')^{-1}Q'(I+\Phi')\\&+(I+\Phi')^{\mathrm T}(I+Q'G')^{-1}C_x^{\mathrm T}K^{-1}C_x(I+Q'G')^{-\mathrm T}(I+\Phi'),\end{aligned}\tag{32}$$

$$\begin{aligned}G_c=&G'+(I+\Phi')^{\mathrm T}(I+G'Q')^{-1}G'(I+\Phi')^{\mathrm T}-[C_\lambda+C_x(I\\&+G'Q')^{-1}G'(I+\Phi')^{\mathrm T}]^{\mathrm T}K^{-1}[C_\lambda+C_x(I+G'Q')G'(I+\Phi')^{\mathrm T}],\end{aligned}\tag{33}$$

$$\begin{aligned}\Phi'_c=&(I+\Phi')(I+Q'G')^{-\mathrm T}(I+\Phi')-(I+\Phi')(I+G'Q')^{-1}G'C_x^{\mathrm T}K^{-1}C_x(I\\&+Q'G')^{-\mathrm T}(I+\Phi')-C_\lambda^{\mathrm T}K^{-1}C_x(I+Q'G')^{-\mathrm T}(I+\Phi')-I,\end{aligned}\tag{34}$$

$$C_{vc}=C_v-C_\lambda[(I+Q'G')^{-1}Q'+(I+Q'G')^{-1}C_x^{\mathrm T}K^{-1}C_x(I+Q'G')^{-\mathrm T}]C_\lambda^{\mathrm T},\tag{35}$$

$$C_{xc}=C_x-C_\lambda[(I+Q'G')^{-1}Q'+(I+Q'G')^{-1}C_x^{\mathrm T}K^{-1}C_x(I$$

$$+ Q'G')^{-T}](I + \Phi'), \tag{36}$$

$$C_{\lambda_c} = C_\lambda[(I + Q'G')^{-1}(I + \Phi')^T - (I + Q'G')^{-1}C_x^T K^{-1} C_x (I + Q'G')^{-T} G'(I + \Phi')^T - (I + Q'G')^{-1} C_x^T K^{-1} C_\lambda]. \tag{37}$$

此时 $K = C_v + C_x(I + G'Q')G'C_x^T$.

对于连续时间问题,在进行数值计算时,存在数值计算是否稳定的问题. 在建立上述消元公式过程中,作者给予了相应的考虑,确保数值计算是稳定的.

5 算例

已知 $\Delta t = 0.01$,

$$Q = \begin{bmatrix} 1.0 & & & 0.0 \\ & 10.0 & & \\ & & 100.0 & \\ 0.0 & & & 0.0 \end{bmatrix}, \quad G_r = \begin{bmatrix} 0.0 & & & 0.0 \\ & 0.0 & & \\ & & 0.0 & \\ 0.0 & & & 9.0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 & 3.0 & 4.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.8 & 3.0 \\ 0.0 & -0.8 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & 1.0 & 1.5 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$C_x = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad C_u = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

经过 5 步迭代,计算结果如下:

$$S = \begin{bmatrix} 0.6098 & 0.0294 & 0.0032 & 0.0531 \\ 0.0294 & 0.5897 & 0.0492 & 0.0837 \\ 0.0032 & 0.0492 & 1.0049 & 0.0084 \\ 0.0531 & 0.0837 & 0.0084 & 2.9824 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.0089 & -0.0068 & -0.2344 & -2.2538 \\ -0.0068 & 0.0051 & 0.1770 & 1.7021 \\ -0.2344 & 0.1770 & 7.1724 & 59.0487 \\ -2.2538 & 1.7021 & 59.0487 & 568.5604 \end{bmatrix}.$$

Riccati 方程的解是 LQ 控制系统设计的基础,有了上述的解,就可方便地进行系统最优设计.

6 结束语

本文基于计算结构力学与最优控制的模拟关系，利用结构力学中的混合能概念有效地处理了连续时间线性等式约束的 LQ 控制问题. 两门学科的相互关系被认识的时间还不算长，进一步的工作(如非线性控制问题等)还有待于研究. 不同学科的相互交流对各自的发展都是有益的.

感谢大连理工大学钟万勰教授、西北工业大学叶天麒教授的指教和帮助.

参 考 文 献

[1] 钟万勰,欧阳华江,邓子辰. 最优控制与计算结构力学的模拟理论. 力学进展,1993,**23**(1): 1—11.
[2] 钟万勰,钟翔翔. LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用. 自动化学报,1992,**18**(3): 325—331.
[3] 钟万勰,钟翔翔. 柱形域椭圆型偏微分方程的横向本征函数的解法. 数值计算与计算机应用, 1992, **13**(2): 107—118.

THE MIXED-ENERGY CONDENSATION ALGORITHM FOR THE CONTINUOUS TIME AND LINEAR EQUALITY CONSTRAINT LQ CONTROL PROBLEM

Deng Zichen

(Faculty of 504, Northwestern Polytechnical University Xian 710072)

Abstract

The differential equations of the continuous time LQ control problem are discretized, then the mixed-energy condensation algorithm is established for the continuous time and linear equality constraint LQ control problem, the above algorithm can be used to solve Riccati equation with the linear constraint effectively. An example is given.

Key words: LQ control; mixed-energy; Riccati equation.