第29卷 第5期 自 动 化 学 报 Vol. 29, No. 5
2003年9月 ACTA AUTOMATICA SINICA Sept., 2003

连续不确定系统满意估计研究[1)]

程相权 郭 治 王远钢 余 海
(南京理工大学自动化系 南京 210094)
(E-mail: chengxiangquan@263.net)

摘 要 根据满意控制思想，针对一类不确定线性系统的状态估计，设计一种满意估计器，使预测误差系统在模型参数有界摄动时，依然同时满足区域极点指标约束、预测误差稳态方差指标约束和 H_∞ 指标约束.

关键词 满意估计，区域极点，方差，H_∞
中图分类号 TP11

A Satisfactory Estimation of Uncertain Continuous Systems

CHENG Xiang-Quan GUO Zhi WUANG Yuan-Gang YU Hai
(*Department of Automation, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing* 210094)
(E-mail: chengxiangquan@263.net)

Abstract For state estimation problem about a kind of uncertain linear systems, a new satisfactory estimator is constructed with satisfactory control theory, which can guarantee that estimation error system with bounded perturbed model parameter is under constraints of regional pole index, estimation error stable variance index and H-infinite index.

Key words Satisfactory estimation, regional pole, variance, H-infinite

1 引言

在有关约束方差控制与估计的文献中，大多文献均假定系统模型是精确的. 实际上，建模过程中不可避免地存在着建模误差，而这将直接影响各项性能指标约束的实现. 因此，设计一种满意估计器[1]，使系统在参数摄动时，依然满足给定的各项性能指标约束，将是一项工程意义十分显著的课题. 文献[2]利用矩阵分解和广义逆理论对类似问题进行了研究，当矩阵维数变大时，其求解变得相当困难，甚至难以求解. 本文是利用线性矩阵不等式(LMI)

1) 国家自然科学基金(60174028)资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China(60174028)
收稿日期 2001-06-11 收修改稿日期 2001-09-21
Received June 11, 2001; in revised form September 21, 2001

的方法对满意估计问题求解，并利用 Matlab-LMI 工具箱很容易得到可行解.

2 问题描述

结构参数扰动线性定常连续系统为

$$\dot{x}(t)=(A+\Delta A)x(t)+Dw(t) \tag{1a}$$

$$y(t)=(C+\Delta C)x(t)+D_1w(t) \tag{1b}$$

上式中 $x(t)\in R^{n_x}$ 为状态向量；$y(t)\in R^{n_y}$ 为系统输出；$w(t)\in R^{n_w}$，当它为随机扰动时，令为零均值高斯白噪声，其强度为 $W>0$，且与初始状态 $x(0)$ 不相关，而当它作为有界扰动时其各分量均平方可积；A,C,D,D_1 是适维实常矩阵；$\Delta A:=MFN,\Delta C:=M_cFN$；假定 (A,C) 完全可观，(A,D) 可扰，$DWD^{\mathrm{T}}>0$. $M\in R^{n_x\times i}$，$M_c\in R^{n_y\times i}$，$N\in R^{j\times n_x}$ 均是实常矩阵，不确定摄动矩阵 F 是非时变范数有界的，即

$$F\in\Phi_F:=\{F\,|\,F\in R^{i\times j},FF^{\mathrm{T}}\leqslant I\} \tag{2}$$

假设对所有摄动 $F\in\Phi_F$，$(A+\Delta A)$ 的极点均位于图 1 所示的区域.

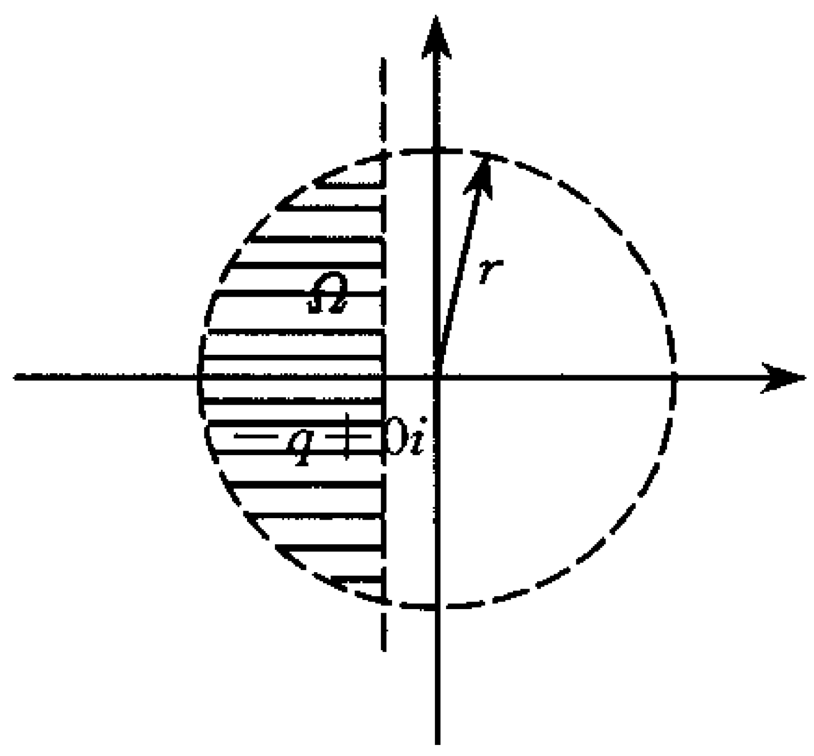

图 1 增广系统期望极点区域

Fig. 1 Area poles placement for the augment system

令状态估计器结构为

$$\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+K[y(t)-C\hat{x}(t)] \tag{3}$$

状态估计误差为 $e(t)=x(t)-\hat{x}(t)$. 则有

$$\dot{e}(t)=(A-KC)e(t)+(\Delta A-K\Delta C)x(t)+(D-KD_1)w(t) \tag{4}$$

记 $x_e(t)=\begin{bmatrix}e(t)\\x(t)\end{bmatrix}$, $A_e=\begin{bmatrix}A-KC & 0\\0 & A\end{bmatrix}$, $M_e=\begin{bmatrix}M-KM_C\\M\end{bmatrix}$, $N_e=[0\quad N]$, $C_e=[I_e\quad 0]$,

$D_e=\begin{bmatrix}D-KD_1\\D\end{bmatrix}$，于是有增广系统

$$\dot{x}_e(t)=(A_e+M_eFN_e)x_e(t)+D_ew(t) \tag{5a}$$

$$e(t)=C_ex_e(t) \tag{5b}$$

定义增广系统稳态状态协方差矩阵为 $X_e:=\lim\limits_{t\to\infty}X_e(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{E}\{x_e(t)x_e^{\mathrm{T}}(t)\}$，它应是如下代数 Lyapunov 方程

$$(A_e+M_eFN_e)X_e+X_e(A_e+M_eFN_e)^{\mathrm{T}}+D_eWD_e^{\mathrm{T}}=0 \tag{6}$$

的唯一正定解. 易得估计误差稳态方差为 $E=C_eX_eC_e^{\mathrm{T}}$，由于 $C_e=[I_e\quad 0]$，所以 E 相当于 X_e

的对角块，可定义为 $X_e=\begin{bmatrix} E & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$.

对于增广系统(5)，从扰动 $w(t)$ 到估计误差 $e(t)$ 的传递函数矩阵为

$$H(s)=C_e(sI-A_e-M_eFN_e)^{-1}D_e,$$

其 H_∞ 范数定义为 $\|H(s)\|_\infty=\sup\limits_{\omega\in R}\sigma_{\max}[H(j\omega)]$，其中 $\sigma_{\max}[\cdot]$ 表示矩阵的最大奇异值.

本文的满意估计问题是设计估计增益 K，使增广系统(5)对所有摄动 $F\in\Phi_F$，均满足下列约束：

1)增广系统的极点位于图 1 所示的区域 $\Omega(q>0)$；

2)增广系统中对应估计误差的稳态方差满足 $E<P_m$；

3)从扰动 $w(t)$ 到估计误差 $e(t)$ 的传递函数矩阵满足 $\|H(s)\|_\infty<\gamma$.

3　主要结论

根据有界实引理[3]、离散和连续李雅普诺夫稳定判据[4]、文献[2]中的定理 6.2.1 及 6.3.1和舒尔补引理[5]，分别得到如下引理.

引理 1. 对所有的摄动 $F\in\Phi_F$，增广系统(5)稳定，且 $\|H(s)\|_\infty<\gamma$ 的充分必要条件是存在(K,Q)且 $Q>0$ 满足

$$\begin{bmatrix} (A_e+M_eFN_e)Q+Q(A_e+M_eFN_e)^{\mathrm T} & D_e & QC_e^{\mathrm T} \\ D_e^{\mathrm T} & -\gamma I & 0 \\ C_eQ & 0 & -\gamma I \end{bmatrix}<0 \tag{7}$$

引理 2. 给定 q 和 r，若对所有的摄动 $F\in\Phi_F$，关于矩阵变量(Q,K)且 $Q>0$ 的下述不等式组

$$(A_e+M_eFN_e)Q(A_e+M_eFN_e)^{\mathrm T}-r^2Q<0 \tag{8}$$

$$(A_e+M_eFN_e)Q+Q(A_e+M_eFN_e)^{\mathrm T}+2qQ<0 \tag{9}$$

有解，则闭环系统满足约束 1).

引理 3. 若存在参数 $\varepsilon>0$，使得关于矩阵变量(Q,K)且 $Q>0$ 的下述矩阵不等式

$$A_eQ+QA_e^{\mathrm T}+\varepsilon M_eM_e^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}QN_e^{\mathrm T}N_eQ+D_eWD_e^{\mathrm T}<0 \tag{10}$$

有解(Q,K)，则对所有的摄动 $F\in\Phi_F$闭环系统稳定，且 K 对应的增广系统稳态状态方差 X_e 满足 $X_e\leqslant Q$.

引理 4. 若存在 $\varepsilon_1>0$ 和 $\varepsilon_2>0$，关于矩阵变量(Q,K)且 $Q>0$ 的下述不等式组

$$A_eQ+QA_e^{\mathrm T}+\varepsilon_1M_eM_e^{\mathrm T}+\varepsilon_1^{-1}QN_e^{\mathrm T}N_eQ+2qQ<0 \tag{11}$$

$$A_e(Q^{-1}-\varepsilon_2N_e^{\mathrm T}N_e)^{-1}A_e^{\mathrm T}+\varepsilon_2^{-1}M_eM_e^{\mathrm T}-r^2Q<0 \tag{12}$$

有解，则增广系统对所有的摄动 $F\in\Phi_F$，均满足约束 1).

引理 5. 若给定指标 γ，存在 $\varepsilon_3>0$，关于矩阵变量(Q,K)且 $Q>0$ 的下述不等式

$$\begin{bmatrix} A_eQ+QA_e^{\mathrm T}+\varepsilon_3M_eM_e^{\mathrm T} & D_e & QC_e^{\mathrm T} & QN_e^{\mathrm T} \\ D_e^{\mathrm T} & -\gamma I & 0 & 0 \\ C_eQ & 0 & -\gamma I & 0 \\ N_eQ & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{bmatrix}<0 \tag{13}$$

有解，则增广系统对所有的摄动 $F\in\Phi_F$，均满足约束 3).

为了能得到线性矩阵不等式，将 Q 的形式加以规定，记为 $Q=\begin{bmatrix}Q_{11} & 0\\ 0 & Q_{22}\end{bmatrix}$，在这样的限制下，上述引理和定理的充分性依然成立. 记 $R=\begin{bmatrix}R_{11} & 0\\ 0 & R_{22}\end{bmatrix}=Q^{-1}=\begin{bmatrix}Q_{11}^{-1} & 0\\ 0 & Q_{22}^{-1}\end{bmatrix}$，$S=Q_{11}^{-1}K=R_{11}K$，定义 $\Phi:=(R_{11}A-SC)+(R_{11}A-SC)^{\mathrm{T}}$，$\Psi(\varepsilon):=R_{22}A+A^{\mathrm{T}}R_{22}+\varepsilon N^{\mathrm{T}}N$，$\Gamma=R_{11}M-SM_c$，于是得到如下 LMI 形式的定理.

定理 1. 给定图 1 所示的区域极点指标 q 和 r、稳态状态方差指标 P_m，H_∞ 指标 γ，若存在 $\varepsilon_2>0$，使得关于变量 $(\varepsilon',\varepsilon_1',\varepsilon_2,\varepsilon_3',R_{11},R_{22},S)$ 且 $\varepsilon'>0,\varepsilon_1'>0,\varepsilon_2>0,\varepsilon_3'>0,R_{11}>0,R_{22}>0$ 的下述线性矩阵不等式组

$$\begin{bmatrix}\Phi & 0 & \Gamma & R_{11}D-SD_1\\ 0 & \Psi(\varepsilon') & R_{22}M & R_{22}D\\ \Gamma^{\mathrm{T}} & (R_{22}M)^{\mathrm{T}} & -\varepsilon' I & 0\\ (R_{11}D-SD_1)^{\mathrm{T}} & (R_{22}D)^{\mathrm{T}} & 0 & -W^{-1}\end{bmatrix}<0 \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix}\Phi+2qR_{11} & 0 & \Gamma\\ 0 & \Psi(\varepsilon_1')+2qR_{22} & R_{22}M\\ \Gamma^{\mathrm{T}} & (R_{22}M)^{\mathrm{T}} & -\varepsilon_1' I\end{bmatrix}<0 \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix}-r^2R_{11} & 0 & \Gamma & R_{11}A-SC & 0\\ 0 & -r^2R_{22} & R_{22}M & 0 & R_{22}A\\ \Gamma^{\mathrm{T}} & (R_{22}M)^{\mathrm{T}} & -\varepsilon_2 I & 0 & 0\\ (R_{11}A-SC)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -R_{11} & 0\\ 0 & (R_{22}A)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & \varepsilon_2N^{\mathrm{T}}N-R_{22}\end{bmatrix}<0 \tag{16}$$

$$-R_{11}+P_m^{-1}<0 \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix}\Phi & 0 & R_{11}D-SD_1 & I & \Gamma\\ 0 & \Psi(\varepsilon_3') & R_{22}D & 0 & R_{22}M\\ (R_{11}D-SD_1)^{\mathrm{T}} & (R_{22}D)^{\mathrm{T}} & -\gamma I & 0 & 0\\ I & 0 & 0 & -\gamma I & 0\\ \Gamma^{\mathrm{T}} & (R_{22}M)^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -\varepsilon_3' I\end{bmatrix}<0 \tag{18}$$

有解，且若 $(\varepsilon',\varepsilon_1',\varepsilon_2,\varepsilon_3',R_{11},R_{22},S)$ 是它的一组解，则 $K=R_{11}^{-1}S$ 是使增广系统对所有的摄动 $F\in\Phi_F$ 均满足约束 1)～3) 的满意估计增益.

证明. 因为 $Q=\mathrm{diag}(Q_{11},Q_{22})$，由式(14～16,18)根据引理 3～5 可得增广系统对所有的摄动 $F\in\Phi_F$ 均满足约束 1)和 3)，且结合式(17)可得与 $K=R_{11}^{-1}S$ 相应的估计误差方差满足 $E<R_{11}^{-1}<P_m$，即满足约束 2). 证毕.

定理 1 中的不等式均是 LMI 形式，因此可以用 Matlab-LMI 工具箱进行求解. 但是，定理 1 中的指标不是任意选取的，通常有一个可行范围，对在可行范围内所提的指标，才能用 Matlab-LMI 工具箱求得可行解；否则，将得不到可行解. 定理 1 中，对于给定区域极点指标为图 1 所示的区域，如果式(14～16)有解，则下述极值问题有意义

$$\max\{\mathrm{tr}R_{11}\}:(\varepsilon',\varepsilon_1',\varepsilon_2,R_{11},R_{22},S)\text{ 满足 LMI}(14\sim16) \tag{19}$$

令 $Q_{11L}=R_{11U}^{-1}$ 是上述极值问题(19)的相应极小值，所以，若所给方差指标 $P_m>Q_{11L}$，LMI(14～17)必有可行解. 于是，对于给定区域极点指标为图 1 所示的区域，方差指标 $P_m>Q_L$，有下述定理成立.

定理 2. 若极值问题(19)存在，给定区域极点指标为图 1 所示的区域，方差指标 $P_m>Q_{11L}$，对于增广系统(5)，关于矩阵变量$(\varepsilon',\varepsilon_1',\varepsilon_2,\varepsilon_3',R_{11},R_{22},S)$的 LMI 组(14～18)总有可行解. 于是，下述极值问题有意义

$$\mathrm{Min}(\gamma):(\varepsilon',\varepsilon_1',\varepsilon_2,\varepsilon_3',R_{11},R_{22},S,\gamma)\text{ 满足 LMI}(14\sim18) \tag{20}$$

证明. 根据极值问题(19)存在的含义可知，关于矩阵变量$(\varepsilon',\varepsilon_1',\varepsilon_2,R_{11},R_{22},S)$LMI(14～17)必有可行解. 不妨令$(\varepsilon',\varepsilon_1',\varepsilon_2,R_{11},R_{22},S)$是一组可行解，因为 $D_eWD_e^{\mathrm{T}}\geqslant0$，由不等式(14)整理可得 $U:=A_eQ+QA_e^{\mathrm{T}}+\varepsilon M_eM_e^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}QN_e^{\mathrm{T}}N_eQ<0$，必然存在实数 $\delta_0>0$，使得下式成立

$$U+\delta_0 I<0 \tag{21}$$

固定 $\varepsilon',\varepsilon_1',\varepsilon_2,R_{11},R_{22},S,\delta_0$，显然存在充分大的正数 γ_0，当 $\gamma>\gamma_0$时，下述不等式成立

$$\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix}D_e & QC_e^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}I & 0\\0 & I\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}D_e^{\mathrm{T}}\\C_eQ\end{bmatrix}<\delta_0 I \tag{22}$$

结合不等式(21)有下式成立

$$U+\frac{1}{\gamma}\begin{bmatrix}D_e & QC_e^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}I & 0\\0 & I\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}D_e^{\mathrm{T}}\\C_eQ\end{bmatrix}<0 \tag{23}$$

根据舒尔补引理[5]，并进行适当的变换，可知不等式(23)与(18)等价. 所以，$(\varepsilon',\varepsilon_1',\varepsilon_2,\varepsilon_3',R_{11},R_{22},S,\gamma)$是 LMI 组(14～18)的一组可行解，又知其解集是凸集，于是极值问题(20)有意义.　　　　证毕.

令 $\gamma_{\min}$是极值问题(20)的极小值解. 显然，当给定极点区域为图 1 所示的区域时，方差上界指标满足 $P_m>Q_L$和 H_∞指标 $\gamma>\gamma_{\min}$($\gamma_{\min}$与 P_m有关)，定理 1 有可行解.

4　数值算例

假设系统(1)中的系数矩阵分别为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\-16.47 & -6.002 & -0.368\\-0.594 & -0.106 & -4.017\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 0.2 & 0\\0 & 1 & 0.2\end{bmatrix},D=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\end{bmatrix},$$

$$D_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0.2&0\\0&0&0&0&0.3\end{bmatrix},\ W=I_5,M=N=0.1I_3,\ M_c=\begin{bmatrix}0.1&0&0\\0&0.1&0\end{bmatrix}.$$

H_∞指标约束为 $\gamma=0.85$；极点约束指标为图 1 所示区域，其中 $q=1,r=5$；约束方差为

$$P_m=\begin{bmatrix}0.59&0&0\\0&6.9&0.5\\0&0.5&0.54\end{bmatrix}$$

用 Matlab-LMI 工具箱计算极值问题(19)和极值问题(20)得

$$Q_{11L}=\begin{bmatrix}0.249 & -0.566 & -0.009\\ -0.566 & 2.94 & 0.007\\ -0.009 & 0.007 & 0.1356\end{bmatrix},\quad \gamma_{\min}=0.70472$$

可见,对于上述所提指标必有可行解,于是求得一个满意估计增益为

$$K=\begin{bmatrix}3.3719 & -0.8979\\ -10.106 & 0.0147\\ -0.1654 & -0.192\end{bmatrix}$$

与之相应的解为

$$Q_{11}=\begin{bmatrix}0.58791 & -0.0755 & -0.0048\\ -0.0755 & 3.4616 & 0.27067\\ -0.0048 & 0.27067 & 0.52438\end{bmatrix}$$

假定 $F=I_3$,则相应的估计误差稳态方差为

$$E=\begin{bmatrix}0.163 & -0.173 & -0.005\\ -0.173 & 0.9107 & 0.029\\ -0.005 & 0.029 & 0.127\end{bmatrix}$$

$A-KC$ 的特征值为

$$\begin{pmatrix}-3.6895\pm 2.7958i\\ -3.9679\end{pmatrix},\ \|H(s)\|_\infty=0.63643$$

References

1 Guo Zhi. A survey of satisfying control and estimation. In: Proceedings of the 14th IFAC Congress, Beijing. Beijing: Press of Tsinghua University, 1999. **G**: 443~447

2 Wang Zi-Dong. Stochastic control theory[Ph. D. dissertation]. Nanjing: Nanjing University of Sci & Tech, 1994(in Chinese)

3 Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. *Automation*, 1996,**32**:1007~1014

4 Huang Lin. Linear algebra in system and control theory. Beijing: Science Press, 1984. 34~40(in Chinese)

5 Stoorvogel A A, Soberi A. The discrete algebraic Riccati equation and linear matrix inequality. In:Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. USA:IEEE Automatic Control Society,1994. **2**(B):1511~1516

程相权 博士研究生,研究领域为图像跟踪和满意控制与估计.

(**CHENG Xiang-Quan** Ph. D. candidate. His research interests include image tracking, satisfactory control and estimation.)