短 文

两步 H_∞ 辨识算法的一个近似最优的误差上界[1)]

王书宁

(清华大学自动化系 北京 100084)

摘要 利用逼近理论中的 n-宽度和 Bernstein 不等式，以一般性的窗口系数为变量，对鲁棒辨识中的两步 H_∞ 辨识算法，建立了一个近似最优的误差上界函数. 该函数是窗口系数的凸函数，它不仅可用于计算任意窗口系数对应的辨识误差上界，还为优化选择两步 H_∞ 辨识算法的窗口系数提供了可行途径.

关键词 鲁棒辨识，最坏情况下的确定型辨识，H_∞ 辨识，两步 H_∞ 辨识算法.

1 引言

两步 H_∞ 辨识算法产生于文献[1]，后经文献[2,3]的发展，成为解决频域 H_∞ 鲁棒辨识问题的一类算法. 迄今，对该算法的研究基本上都局限于对具体的窗口系数推导辨识误差上界，以证明相应算法的收敛性. 这些上界一般比较保守[2]，不能据其大小比较不同窗口系数的优劣. 为此，本文以一般性窗口系数为变量，建立了一个近似最优的误差上界函数. 它不仅为计算任意窗口系数对应的辨识误差上界提供了便利，还可直接用于优化选择窗口系数.

本文采用以下符号约定：C^N 表示起始下标为 0 的全体 N 维复向量的集合；L_∞ 表示满足 $\|h\|_{L_\infty}:=\operatorname*{esssup}_{|z|=1}|h(z)|<\infty$ 的复变函数组成的赋范空间；$Q^N:=\{h, h\in L_\infty \mid h(z)=\sum_{k=-(N-1)}^{N-1} h_k z^k\}$；$H_\infty$ 表示满足 $\|h\|_{H_\infty}:=\operatorname*{esssup}_{|z|<1}|h(z)|<\infty$ 的解析函数组成的赋范空间；$P^N:=\{h, h\in H_\infty \mid h(z)=\sum_{k=0}^{N-1} h_k z^k\}$；由于 $\|h\|_{H_\infty}=\|h\|_{L_\infty}, \forall h\in H_\infty$，将统一用 $\|h\|_\infty:=\operatorname*{esssup}_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}|h(e^{j\omega})|$ 表示 L_∞ 和 H_∞ 的范数，其中 j 表示 $\sqrt{-1}$；对任意的 $x\in C^N$，x_k 总表示其分量；对任意的 $h\in H_\infty$，h_k 总表示其 Taylor 系数.

---

1) 得到国家自然科学基金和教委博士点基金资助课题.

收稿日期 1995-09-06

2　预备知识

2.1　H_∞ 辨识问题

设被辨识系统为离散、稳定、因果、线性时不变的单变量系统. 假定：1) 系统脉冲响应 $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ 构成的传递函数 $h(z):=\sum_{k=0}^{\infty}h_kz^k$ 属于先验模型集 $H(M,\rho):=\{h,h\in H_\infty \mid |h(z)|\leqslant M,\forall\ |z|<\rho\}$，其中 $M>0$ 和 $\rho>1$ 给定；2) 对任意的 $N>0$，可得到受污染的频域观测数据 $E^N(h,\eta)\in C^N$，满足 $E_t^N(h,\eta)=h(e^{j\frac{2\pi t}{N}})+\eta_t,0\leqslant t\leqslant N-1$，其中 $\eta\in B^N(\varepsilon):=\{\eta,\eta\in C^N \mid |\eta_t|\leqslant\varepsilon,0\leqslant t\leqslant N-1\}$ 是未知噪声，$\varepsilon>0$ 给定. 要求：1) 设计算法 $\varphi:C^N\mapsto H_\infty$，使能用 $\varphi(E^N(h,\eta))$ 逼近 h；2) 确定 φ 在最坏情况下可能产生的辨识误差 $e_{N\varepsilon}(\varphi):=\sup\{\|\varphi(E^N(h,\eta))-h\|_\infty \mid s.t.\ h\in H(M,\rho),\eta\in B^N(\varepsilon)\}$ 的上界，并分析 $e_{N\varepsilon}(\varphi)$ 可否随着 N 趋于无穷和 ε 趋于零而趋于零，具有这种性质的算法称为收敛的算法.

2.2　两步 H_∞ 辨识算法

用 $F^N:C^N\mapsto C^N$ 表示离散 Fourier 变换，即 $F_k^N(y):=\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}y_te^{-j\frac{2\pi tk}{N}}$，$0\leqslant k\leqslant N-1$，$\forall\ y\in C^N$. 对任意的整数 m 和 $0\leqslant k\leqslant N-1$，规定 $F_{k+mN}^N(y)=F_k^N(y)$. 定义映射 $\varphi_1^{nx}:C^N\mapsto L_\infty$ 和 $\varphi^*:L_\infty\mapsto H_\infty$ 如下：

$$(\varphi_1^{nx}(y))(z)=\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}x_kF_k^N(y)z^k,\forall\ y\in C^N;$$

$$\|\varphi^*(h)-h\|_\infty=\min_{\hat{h}\in H_\infty}\|\hat{h}-h\|_\infty,\forall\ h\in L_\infty.$$

其中 n 为给定的正整数，$\{x_k\}_{k=-(n-1)}^{n-1}$ 为给定的窗口系数. 所谓两步 H_∞ 辨识算法即由映射 $\varphi_2^{nx}(E^N(h,\eta)):=\varphi^*(\varphi_1^{nx}(E^N(h,\eta)))$ 生成所需模型. 容易证明[3]

$$e_{N\varepsilon}(\varphi_2^{nx})\leqslant 2e_{N\varepsilon}(\varphi_1^{nx}).\tag{1}$$

此外，φ^* 完全由 Nehari 定理所确定[4]. 可见，φ_2^{nx} 的性能实际上只取决于窗口系数 x 的选择.

2.3　几个引理

引理 1. [5]若 $M>0,\rho>1$，则对任意正整数 N 和 $h\in H(M,\rho)$，成立

$$\inf_{\hat{h}\in P^N}\|\hat{h}-h\|_\infty=\|\Gamma^{N\rho}(h)-h\|_\infty\leqslant M\rho^{-N},$$

其中 $\Gamma^{N\rho}:H_\infty\mapsto H_\infty$ 定义为 $(\Gamma^{N\rho}(h))(z)=\sum_{k=0}^{N-1}(1-\rho^{2(k-N)})h_kz^k$.

引理 2. 对任意的 $a\in C^N$ 和 $b\in C^N$，成立

$$\sup_{\substack{h\in H^N(M,\rho)\\ \eta\in B^N(\varepsilon)}}\left|\sum_{k=0}^{N-1}(a_kh_k+b_k\eta_k)\right|=M\left(\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_k^{N\rho})^{-2}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}|b_k|,$$

其中 $H^N(M,\rho):=\{h,h\in P^N \mid \sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_k^{N\rho})^2|h_k|^2\leqslant M^2\}$，$\alpha_k^{N\rho}:=\rho^k(1-\rho^{2(k-N)})^{-1}$，$0\leqslant K\leqslant N-1$.

证明. 首先利用 Cauchy 不等式可得

$$\left|\sum_{k=0}^{N-1}(a_kh_k+b_k\eta_k)\right|\leqslant\left(\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_k^{N\rho})^{-2}|a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_k^{N\rho})^2|h_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{k=0}^{N-1}|b_k||\eta_k|$$

$$\leqslant M(\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_k^{N\rho})^{-2}|a_k|^2)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}|b_k|,\forall\ h\in H^N(M,\rho),\eta\in B^N(\varepsilon). \tag{2}$$

此外，令 $h_t^0=M(\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_k^{N\rho})^{-2}|a_k|^2)^{-\frac{1}{2}}(\alpha_t^{N\rho})^{-2}\bar{a}_t,\eta_t^0=\varepsilon\bar{b}_t(|b_t|)^{-1},0\leqslant t\leqslant N-1$，其中 $\bar{a}_t$ 和 $\bar{b}_t$ 分别表示 a_t 和 b_t 的共轭复数. 取 $h^0\in P^N$ 为 $h^0(z)=\sum_{k=0}^{N-1}h_k^0z^k$，容易验证

$$h^0\in H^N(M,\rho),\eta^0\in B^N(\varepsilon), \tag{3}$$

$$|\sum_{k=0}^{N-1}(a_kh_k^0+b_k\eta_k^0)|=M(\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_k^{N\rho})^{-2}|a_k|^2)^{\frac{1}{2}}+\varepsilon\sum_{k=0}^{N-1}|b_k|. \tag{4}$$

结合(2)—(4)式,知本引理成立.

引理 3. 对任意的 $h\in Q^N$ 和满足 $n>4\pi(N-1)$的正整数 n，成立

$$\max_{0\leqslant l\leqslant n-1}|h(e^{j\frac{2\pi l}{n}})|\leqslant\|h\|_\infty\leqslant(1-\frac{4\pi(N-1)}{n})^{-1}\max_{0\leqslant l\leqslant n-1}|h(e^{j\frac{2\pi l}{n}})|.$$

证明. 引理的左半不等式显然成立. 只证其右半不等式. 记 $h(z)=\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}h_kz^k$，令 $f(\omega)=\sum_{k=0}^{2(N-1)}h_{k-N+1}e^{jk\omega}$. 不难看出

$$|h(e^{j\omega})|=|f(\omega)|,\forall\ 0\leqslant\omega\leqslant 2\pi. \tag{5}$$

对任意的 $0\leqslant l\leqslant n-1$，利用 $f(\omega)$的实部和虚部在$\frac{2\pi l}{n}$处的一阶 Taylor 展开及 Bernstain 不等式[6]，有

$$\sup_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}|f'(\omega)|\leqslant 2(N-1)\sup_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}|f(\omega)|,$$

可以推得

$$\sup_{|\omega-\frac{2\pi}{n}|\leqslant\frac{\pi}{n}}|f(\omega)|\leqslant|f(\frac{2\pi l}{n})|+\frac{4(N-1)\pi}{n}\sup_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}|f(\omega)|.$$

在上式两边对于 l 求最大,注意到 $1-\frac{4(N-1)\pi}{n}>0$,可得

$$\sup_{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}|f(\omega)|\leqslant(1-\frac{4(N-1)\pi}{n})^{-1}\max_{0\leqslant l\leqslant n-1}|f(\frac{2\pi l}{n})|. \tag{6}$$

最后,将(5)式代入(6)式可得欲证之不等式.

3 主要结果

为论述方便，将两步 H_∞辨识算法中的 n 取为 N，对 $n=mN$，$m>1$ 的情况可类似处理.

定理 1. 对任意算法 $\varphi: C^N\mapsto L_\infty$，成立

$$e_{N\varepsilon}(\varphi)\leqslant\hat{e}_{N\varepsilon}(\varphi)+M\rho^{-N},$$

其中 $\hat{e}_{N\varepsilon}(\varphi):=\sup\{\|\varphi(E^N(h,\eta))-h\|_\infty|s.t.\ h\in H^N(M,\rho),\ \eta\in B^N(\varepsilon+M\rho^{-N})\}$.

证明. 对任意的 $h\in H(M,\rho)$和 $\eta\in B^N(\varepsilon)$,令 $d_t=(h-\Gamma^{N\rho}(h))(e^{j\frac{2\pi t}{N}})+\eta_t$，$0\leqslant t\leqslant N-1$. 由引理 1 知

$$\|h-\Gamma^{N\rho}(h)\|_\infty\leqslant M\rho^{-N},\ d\in B^N(\varepsilon+M\rho^{-N}). \tag{7}$$

此外，利用 Parseval 等式可得

$$\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_k^{N\rho})^2|(1-\rho^{2(k-N)})h_k|^2=\sum_{k=0}^{N-1}\rho^{2k}|h_k|^2$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{2k}|h_k|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(\rho e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega\leqslant M^2.$$

所以，$\Gamma^{N\rho}(h)\in H^N(M,\rho)$. 再注意到 $E^N(h,\eta)=E^N(\Gamma^{N\rho}(h),d)$，结合(7)式可最终推得

$$e_{N\varepsilon}(\varphi)=\sup_{\substack{h\in H(M,\rho)\\ \eta\in B^N(\varepsilon)}}\|\varphi(E^N(\Gamma^{N\rho}(h),d))-\Gamma^{N\rho}(h)+\Gamma^{N\rho}(h)-h\|_\infty\leqslant\hat{e}_{N\varepsilon}(\varphi)+M\rho^{-N}.$$

定理 2. 如果 $m>4\pi$，则有

$$\max_{0\leqslant l\leqslant m-1}g(x,\frac{2\pi l}{mN})\leqslant\hat{e}_{N\varepsilon}(\varphi_1^{Nx})\leqslant(1-\frac{4\pi}{m})^{-1}\max_{0\leqslant l\leqslant m-1}g(x,\frac{2\pi l}{mN}).$$

其中 $g(x,w):=M(\sum_{k=0}^{N-1}(\alpha_k^{N\rho})^{-2}|\gamma_k(x,\omega)-1|^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{\varepsilon+M\rho^{-N}}{N}\sum_{t=0}^{N-1}|\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k(x,\omega)e^{jk(\omega-\frac{2\pi t}{N})}|$,

$\gamma_0(x,\omega):=x_0,\gamma_k(x,\omega):=x_k+x_{k-N}e^{-jN\omega},\ 1\leqslant k\leqslant N-1.$

证明．对任意的 $h\in H^N(M,\rho)$ 和 $\eta\in B^N(\varepsilon+M\rho^{-N})$，利用

$$\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi tn}{N}}=\begin{cases}1,\ 若\frac{n}{N}为整数,\\ 0,\ 其它情况,\end{cases}$$

可以得到

$$F_k^N(E^N(h,\eta))=h_k+\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\eta_te^{-j\frac{2\pi tk}{N}},0\leqslant k\leqslant N-1.$$

注意到对 $F_k^N(E^N(h,\eta))$ 在 $k<0$ 和 $k\geqslant N$ 时的规定，可得

$$(\varphi_1^{Nx}(E^N(h,\eta))-h)(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}(((\gamma_k(x,\omega)-1)e^{jk\omega})h_k$$

$$+(\frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}\gamma_t(x,\omega)e^{jt(\omega-\frac{2\pi k}{N})}\eta_k),\ 0\leqslant\omega\leqslant 2\pi.$$

对上式利用引理 2 可直接得到

$$\sup_{\substack{h\in H^N(M,\rho)\\ \eta\in B^N(\varepsilon+M\rho^{-N})}}|(\varphi_1^{Nx}(E^N(h,\eta))-h)(e^{j\omega})|=g(x,\omega),0\leqslant\omega\leqslant 2\pi. \tag{8}$$

另一方面，由于 $\varphi_1^{Nx}(E^N(h,\eta))-h\in Q^N$，利用引理 3 可得

$$\max_{0\leqslant l\leqslant mN-1}|(\varphi_1^{Nx}(E^N(h,\eta))-h)(e^{j\frac{2\pi l}{mN}})|\leqslant\|\varphi_1^{Nx}(E^N(h,\eta))-h\|_\infty$$

$$\leqslant(1-\frac{4(N-1)\pi}{mN})^{-1}\max_{0\leqslant l\leqslant mN-1}|(\varphi_1^{Nx}(E^N(h,\eta))-h)(e^{j\frac{2\pi l}{mN}})|. \tag{9}$$

最后，注意到 $\left(1-\frac{4(N-1)\pi}{mN}\right)^{-1}\leqslant\left(1-\frac{4\pi}{m}\right)^{-1}$ 及 $g(x,\omega+\frac{2\pi}{N})=g(x,\omega),\forall\ \omega$，在(9)式关于 h 和 η 求上确界，并利用(8)式，可得到本定理的结论.

由以上定理和(1)式，立即可得以下推论.

推论 1. 对任意一组窗口系数 x，成立

$$e_{N\varepsilon}(\varphi_2^{Nx})\leqslant 2(M\rho^{-N}+(1-\frac{4\pi}{m})^{-1}\max_{0\leqslant l\leqslant m-1}g(x,\frac{2\pi l}{mN})),$$

其中 m 为满足 $m>4\pi$ 的任意整数.

4 结束语

为获得推论1采取了两种保守的处理方法：第一，利用引理1将$h(z)$的无穷尾项转换为一个其H_∞范数不大于$M\rho^{-N}$的未知量；第二，用各h_t的不等式约束$\sum_{t=0}^{\infty}\rho^{2t}|h_t|^2\leqslant M^2$代替不易处理的原始约束$|\sum_{t=0}^{\infty}h_t\rho^t e^{jt\omega}|\leqslant M,\ \forall\ \omega$. 文献中一般采用 Cauchy 估计$\rho^t|h_t|\leqslant M,\ \forall\ t$处理以上问题. 由于 Cauchy 估计可以从$\rho^{2t}|h_t|^2\leqslant\sum_{t=0}^{\infty}\rho^{2t}|h_t|^2\leqslant M^2$推出，而从 Cauchy 估计出发只能得到无穷尾项的如下上界$|\sum_{t=N}^{\infty}h_t e^{jt\omega}|\leqslant\sum_{t=N}^{\infty}|h_t|\leqslant M\rho^{-N}(1-\rho^{-1})^{-1}$. 因此，本文建立的上界应更接近误差上确界.

此外，$\max\limits_{0\leqslant l\leqslant m-1}g\left(x,\frac{2\pi l}{mN}\right)$是$x$的凸函数，而凸规划问题存在一般有效的求解算法. 因此，推论1建立的上界不仅为计算任意一组与窗口系数对应的辨识误差上界提供了便利，还为优化选择窗口系数提供了可行途径.

参 考 文 献

[1] Helmicki A J, Jacobson C A, Nett C N. Control oriented system identification: a worst-case/deterministic approach in H^∞. *IEEE Trans. Automatic Control*, 1991, **36**(10):1163－11276.

[2] Partington J R. Robust identification and interpolation in H_∞. *Int. J. Control*. 1991, **54**(5):1281－1290.

[3] Gu G, Khargonekar P P. A class of algorithms for identificaiton in H^∞. *Automatica*, 1992, **28**(2):299－312.

[4] Young N J. An Introduction to Hilbert Space, New York: Cambridge University Press, 1988.

[5] Gu G. Suboptimal algorithms for worst case identification in H^∞ and model validation, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994. **39**(8):1657－1661.

[6] Beckenbach E F, Bellman R. Inequalities, Berlin: Springer-Verlag, 1983.

A QUASI-OPTIMAL UPPER ERROR BOUND FOR TWO-STAGE H_∞ IDENTIFICATION ALGORITHMS

WANG SHUNING

(*Dept. of Automation, Tsinghua University, Beijing* 100084)

Abstract By making use of n-width in approximation theory and Bernstain's inequality, a quasi-optimal upper error bound for two-stage H_∞ identification algorithms of robust identification is established in this paper, which is an explict function of general window coefficients. The function is convex with respect to window coefficients. It not only can be used for computation of upper error bounds corresponding to any concrete window coefficients, but also supplies a feasible way for choosing window coefficients of two-stage H_∞ identification algorithms with optimization techniques.

Key words Robust identification, worst-case/deterministic identification, H_∞ identificatioin, two-stage H_∞ identification algorithms.