

离散事件系统广义分式方法¹⁾

朱更新 郑大钟

(清华大学自动化系, 北京 100084)

摘 要

本文在 Z -域上考虑一类离散事件系统, 引入极大代数上的有理式作为传递函数的紧致表达式, 将有理式展开成广义分式进行系统分析与设计, 讨论了广义分式的约简与标准形; 研究了有理传递函数的谱特征与周期响应, 同时给出了最优控制等应用实例。

关键词: 离散事件, Z -域描述, 谱分析。

一、引 言

事件图是深受欢迎的离散事件模型, 不仅适用范围广, 而且具有极大代数意义下的“线性”描述, 如事件域上的“状态方程”^[1]。

正如常规线性系统, 输入输出 (I/O) 描述简明实用、具有很强的物理意义。外部描述与内部描述相结合, 在系统分析与设计中起到很大作用。为此 Cohen 等曾提出极大代数意义下的 Z -变换^[1], 取得了许多宝贵结果。但形式幂级数直接用作传递函数, 不能体现 I/O 描述的优越性。需要引入传递函数的紧致(封闭)表达式。

二、 Z -域描述与有理表达式

极大代数 $(E, \oplus, \otimes) \triangleq (R \cup \{-\infty\}, \max, +)$, $\varepsilon = -\infty$ 和 $e = 0$ 分别为零元和单位元。本文省略 \otimes 符, 幂运算理解为常规意义下的乘法。序列 $\{x_k\}$ 的 Z -变换是形式幂级数 $X(z^{-1}) = \bigoplus_{k \geq 0} x_k z^{-k}$ 。引入记号 $\{X(z^{-1})\}_k \triangleq x_k$ 。事件图映射为 Z -域上的(信号)流图。如图 1, 2。

流图中并(串)联支路可通过 \oplus (\otimes) 合为单一支路。反馈环涉及隐含方程

$$X = AX \oplus B. \quad (1)$$

引理 1. 若 $\{A\}_0 = \varepsilon$, 则方程 (1) 有唯一解 $X = A^*B$, 其中

$$A^* \triangleq \bigoplus_{n \geq 0} A^n. \quad (2)$$

本文于 1991 年 10 月 23 日收到。

1) 国家自然科学基金和 863 自动化领域 CIMS 主题资助的课题。

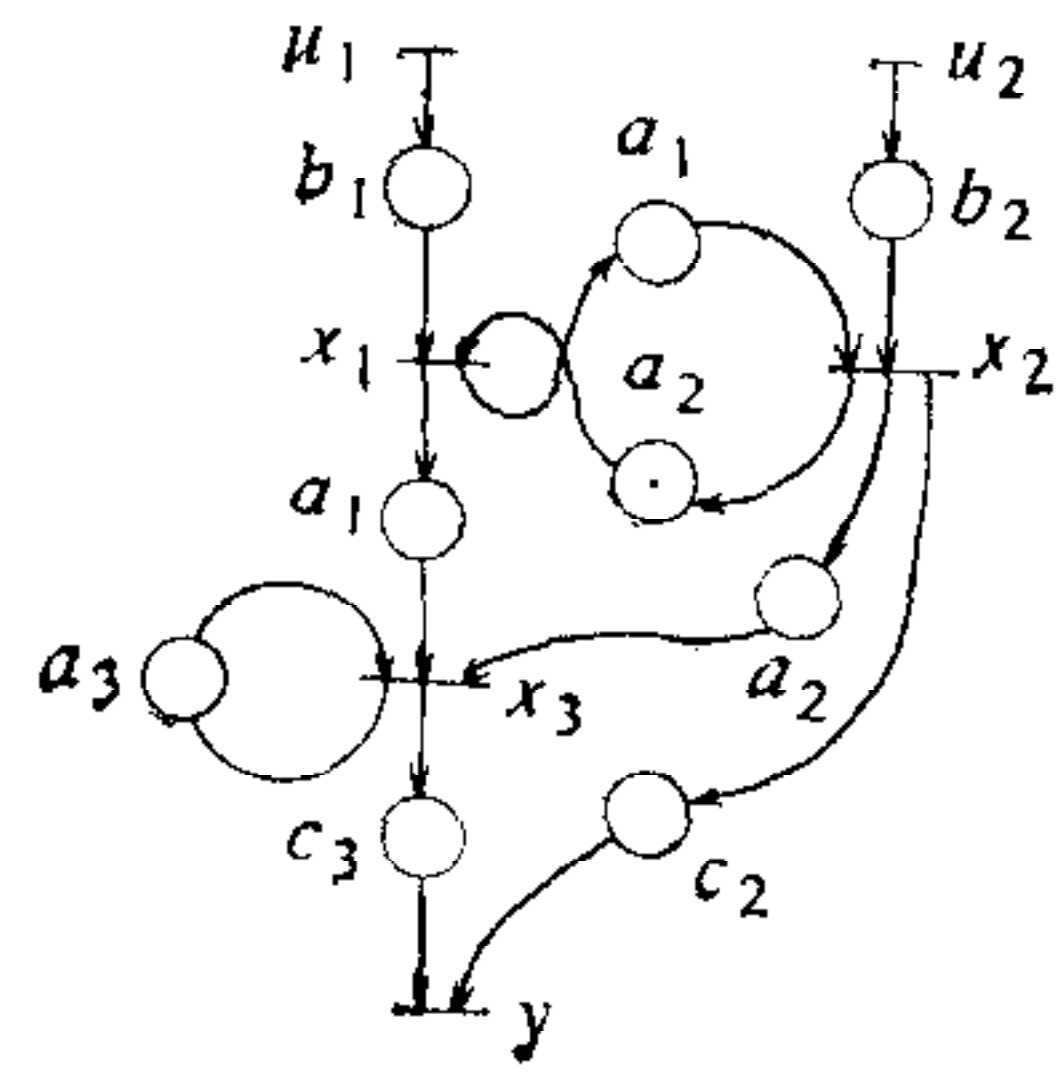


图 1 事件图

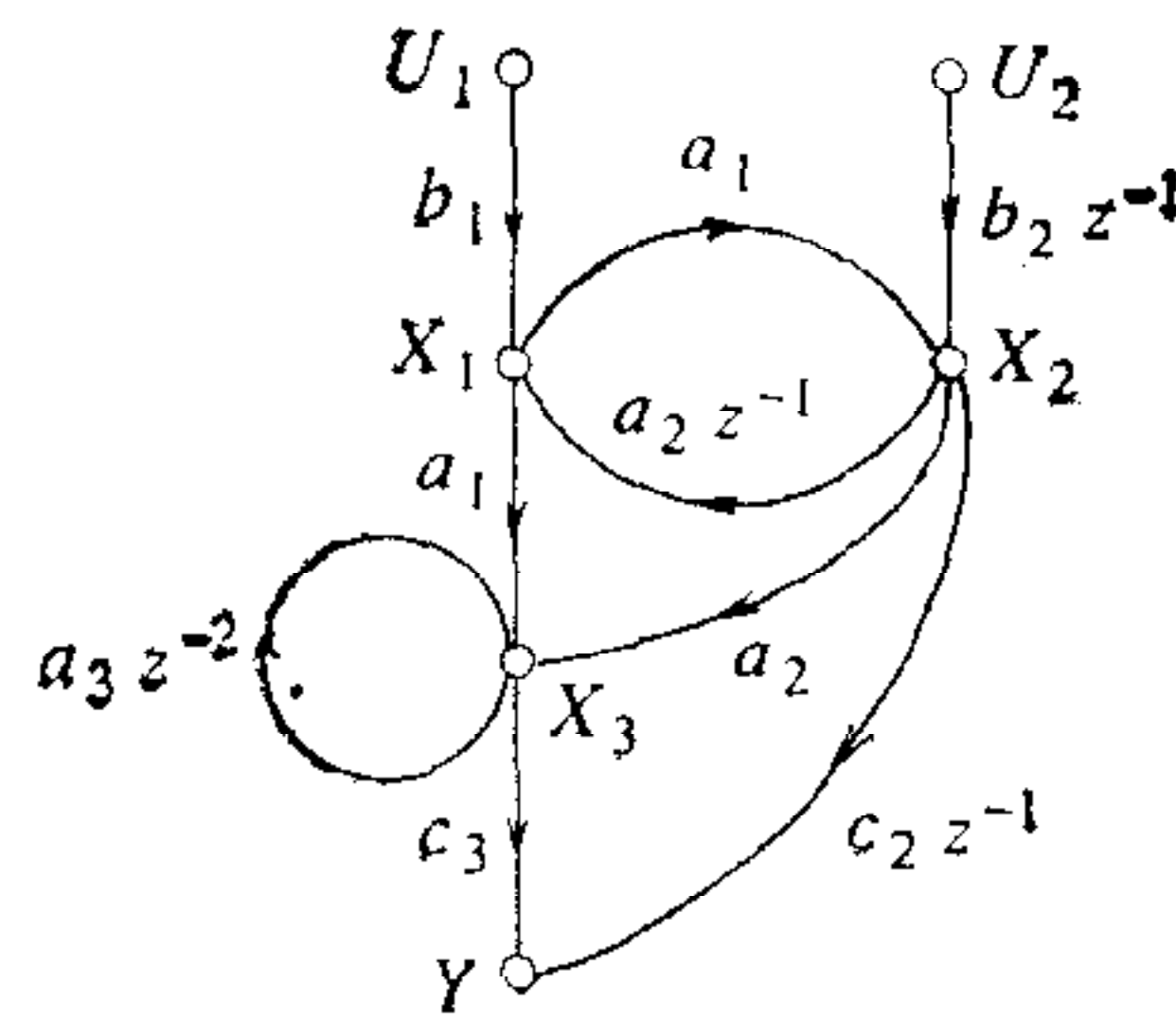


图 2 流图

证明. 由(1)式得 $X = A^{k+1}X \oplus \left(\bigoplus_{n=0}^k A^n B \right)$. 注意到 $\{A\}_0 = \varepsilon$,

$$\{X\}_k = \left\{ \bigoplus_{n=0}^k A^n B \right\}_k = \{A^*B\}, k \geq 0$$

即 $X = A^*B$. 反之将 $X = A^*B$ 代入(1)式, 两边相等.

定理 1. 若 $\{A\}_0 = \varepsilon$, 则环路可按图 3 的方式消掉.

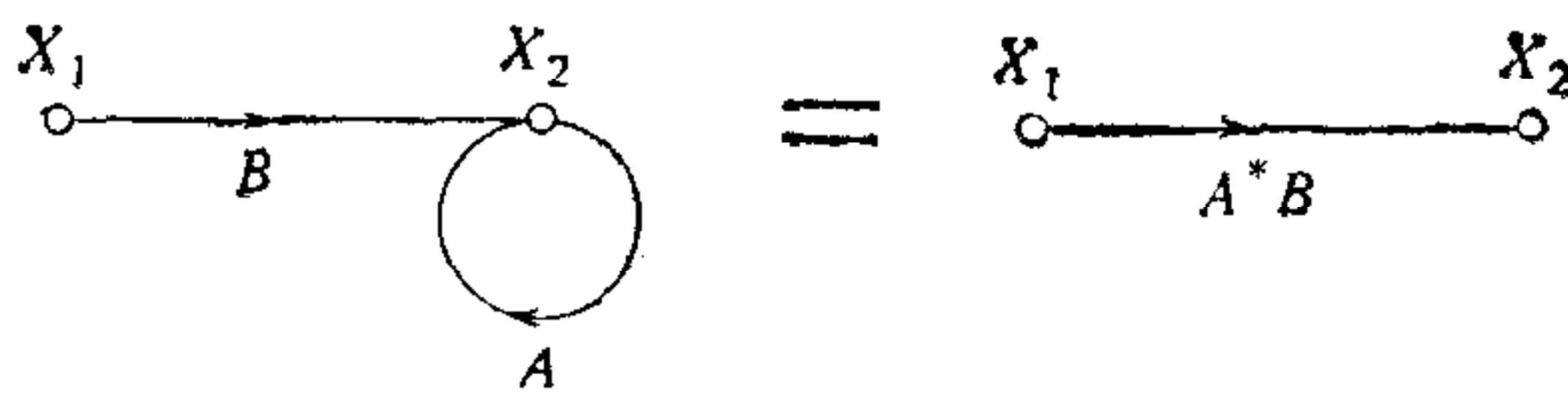


图 3

证明. 应用引理 1.

定义 1. 多项式经过有限次 $\oplus, \otimes, *$ -运算得到的表达式称为有理式.

有理式是幂级数的紧致表示, 可按(2)式展开.

定理 2. 事件图的传递函数是有理的.

的.

证明. 从事件图构造的初始流图上只有单项式增益. 根据定理 1, 并(串)联支路、环路通过 $\oplus(\otimes), *$ -运算合成单一支路. 有限步代数运算后, 得有理传递函数.

定义 2. 设 $A(z^{-1}), B(z^{-1})$ 是关于 z^{-1} 的多项式, $\{A\}_0 = \varepsilon$, 称表达式 A^*B 为广义分式, A, B 分别为分母、分子. 若 $A = \varepsilon$, 则 A^*B 退化为 B .

引理 2. 设 A, B 是有理式

$$A^*B^* = (A \oplus B)^*, (A^*B)^* = e \oplus (A \oplus B)^*B. \quad (3), (4)$$

证明. $A^*B^* = \left(\bigoplus_{n \geq 0} A^n \right) \left(\bigoplus_{m \geq 0} B^m \right) = \bigoplus_{n, m \geq 0} A^n B^m,$

$$(A \oplus B)^* = \bigoplus_{l \geq 0} (A \oplus B)^l = \bigoplus_{l \geq 0} \left(\bigoplus_{n+m=l} A^n B^m \right) = \bigoplus_{n, m \geq 0} A^n B^m,$$

(3)式得证. 特别地, $(A^*)^2 = A^*$, 于是

$$\begin{aligned} (A^*B)^* &= e \oplus \left[\bigoplus_{n \geq 1} (A^*B)^n \right] = e \oplus \left[\bigoplus_{n \geq 1} A^*B^n \right] \\ &= e \oplus A^* \left(\bigoplus_{n \geq 0} B^n \right) B = e \oplus A^*B^*B = e \oplus (A \oplus B)^*B, \end{aligned}$$

(4)式得证.

定理 3. 有理式均能展开成广义分式和.

证明. 应用引理 2.

如图 2, 传递矩阵 $H = [H_1, H_2]$, 其中

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= b_1 a_1 c_2 z^{-1} (a_1 a_2 z^{-1})^* \oplus b_1 a_1 a_2 c_3 (a_1 a_2 z^{-1} \oplus a_3 z^{-2})^* \\ H_2 &= b_2 c_2 z^{-2} (a_1 a_2 z^{-1})^* \oplus b_2 a_2 c_3 (z^{-1} \oplus a_1 z^{-2}) (a_1 a_2 z^{-1} \oplus a_3 z^{-2})^* \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

三、广义分式约简与标准形

1. 冗余项

广义分式去掉分子(分母)中的一项, 不影响其展开的形式幂级数, 则称该项为冗余项. 下面用 N 表示正整数集.

定理 4. $A = \bigoplus_{i \in I} \alpha_i$, 若

$$\alpha_s \leq \bigotimes_{j \in J} \alpha_j^{k_j}, \quad k_j \in N, \quad j \in J \subset I \setminus \{s\} \quad (6)$$

则

$$A^* = \left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{s\}} \alpha_i \right)^* \quad (7)$$

证明. 由(6)式

$$\alpha_s \left(\bigotimes_{j \in J} \alpha_j^* \right) \leq \bigotimes_{j \in J} (\alpha_j^{k_j} \alpha_j^*) \leq \bigotimes_{j \in J} \alpha_j^*, \quad \alpha_s^* \left(\bigotimes_{j \in J} \alpha_j^* \right) = \bigotimes_{j \in J} \alpha_j^*.$$

根据引理 2

$$A^* = \alpha_s^* \left(\bigotimes_{i \neq s} \alpha_i^* \right) = \bigotimes_{i \neq s} \alpha_i^* = \left(\bigoplus_{i \neq s} \alpha_i \right)^*.$$

证毕

应用定理 4, 可消广义分式的分母冗余项. 令 $a_i = a_i z^{-n_i}$, 则(6)式在常规意义下表示为

$$n_s = \sum_{j \in J} k_j n_j, \quad a_s \leq \sum_{j \in J} k_j a_j. \quad (8)$$

引理 3. 设 $B(z^{-1}) = \bigoplus_{i \in J} b_i z^{-m_i}$, $b_i z^{-m_i}$ 是 $(z^{-n})^* B(z^{-1})$ 的冗余项, 当且仅当存在 $r \in J$ 满足

$$\left. \begin{aligned} m_r &\equiv m_t \pmod{n} \\ m_r &< m_t, \quad b_r \geq b_t \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

证明. 令 $\bar{m}_j = \{k : k \equiv m_j \pmod{n}\}$, 则

$$(z^{-n})^* z^{-m_j} = \bigoplus_{\substack{k \in \bar{m}_j \\ k \geq m_j}} z^{-k}.$$

因此,(9)式等价于 $(z^{-n})^* b_i z^{-m_i} \leq (z^{-n})^* b_r z^{-m_r}$.

证毕

定理 5. $A = \bigoplus_{i \in I} a_i z^{-n_i}, B = \bigoplus_{j \in J} b_j z^{-m_j}, \lambda_i = \frac{a_i}{n_i}, i \in I, b_i z^{-m_i}$ 是 $A^* B$ 的分子冗余项,如果存在 $s \in I, r \in J$ 满足

$$\left. \begin{aligned} m_r &= m_i \pmod{n_i} \\ m_r < m_i, b_r \lambda_s^{-m_r} &\geq b_i \lambda_s^{-m_i} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

证明.

应用引理 3 即得
$$A^* B = \left(\bigoplus_{i \neq s} a_i z^{-n_i} \right)^* (\lambda_s^{n_s} z^{-n_s})^* \left(\bigoplus_{j \in J} b_j \lambda_s^{-m_j} \lambda_s^{m_j} z^{-m_j} \right).$$

2. 标准形

引理 4. $A = \bigoplus_{i \in I} a_i z^{-n_i}, \lambda_i = \frac{a_i}{n_i}, i \in I.$ 若 $\lambda_s \geq \lambda_t,$ 则

$$A^* = \left(\bigoplus_{i \neq t} a_i z^{-n_i} \right)^* \left[\bigoplus_{j=0}^{n_t-1} (a_t z^{-n_t})^j \right]. \quad (11)$$

证明.

$$A^* = \left(\bigoplus_{i \neq t} a_i z^{-n_i} \right)^* \left[\bigoplus_{k \geq 0} (a_t z^{-n_t})^k \right]. \quad (12)$$

当 $k \geq n_t$ 时,令 $k \equiv j \pmod{n_t}, 0 \leq j < n_t.$ 由 $\lambda_s \geq \lambda_t, a_t \lambda_s^{-n_t} \leq e,$ 于是 $(a_t \lambda_s^{-n_t})^k \leq (a_t \lambda_s^{-n_t})^j.$ 对(12)式右边应用定理 5 即得.

定义 3. 设 B 是多项式, $a \in R, n \in N,$ 称 $(az^{-n})^* B(z^{-1})$ 为单模广义分式.

定理 6. 广义分式均可化为单模的。(证明可由引理 4 得)

定义 4. 设 $(\lambda^n z^{-n})^* B(\lambda z^{-1})$ 分子无冗余项. 若多项式 B 的次数 $\deg B < n,$ 则称 $(\lambda^n z^{-n})^* B(\lambda z^{-1})$ 为单模真分式;否则为单模假分式.

定理 7. 若 $(\lambda^n z^{-n})^* B(\lambda z^{-1})$ 是单模假分式, 则存在次数分别小于 r, n 的多项式 P_{r-1}, Q_{n-1} 满足

$$(\lambda^n z^{-n})^* B(\lambda z^{-1}) = P_{r-1}(\lambda z^{-1}) \oplus \lambda^r z^{-r} (\lambda^n z^{-n})^* Q_{n-1}(\lambda z^{-1}). \quad (13)$$

证明. 设 $B(\lambda z^{-1}) = \bigoplus_{j=0}^m b_j z^{-j}, r = m - n + 1,$ 令

$$\left. \begin{aligned} p_i &= \bigoplus_{\substack{j \equiv i \pmod{n} \\ j \leq i}} b_j, 0 \leq i \leq m \\ q_i &= p_{r+i}, 0 \leq i < n \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

则

$$P_{r-1}(\lambda z^{-1}) = \bigoplus_{k=0}^{r-1} p_k \lambda^k z^{-k}, Q_{n-1}(\lambda z^{-1}) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} q_i \lambda^i z^{-i}$$

满足(13)式.

引理 5. $n = md, Q_{n-1}, \tilde{Q}_{d-1}$ 是次数分别小于 n, d 的多项式, 且

$$Q_{n-1}(\lambda z^{-1}) = \tilde{Q}_{d-1}(\lambda z^{-1}) \left[\bigoplus_{i=0}^{m-1} (\lambda^d z^{-d})^i \right], \quad (15)$$

则

$$(\lambda^n z^{-n})^* Q_{n-1}(\lambda z^{-1}) = (\lambda^d z^{-d})^* \tilde{Q}_{d-1}(\lambda z^{-1}). \quad (16)$$

证明. 注意到下式, 即得

$$(\lambda^n z^{-n})^* \left[\bigoplus_{i=0}^{m-1} (\lambda^d z^{-d})^i \right] = (\lambda^d z^{-d})^*.$$

定义 5. 满足引理 5 的条件的单模真分式 $(\lambda^n z^{-n})^* Q_{n-1}(\lambda z^{-1})$ 称为可约的; 否则为既约的.

定理 8. 广义分式均可化为如下标准形

$$A^* B = P_{r-1}(\lambda z^{-1}) \oplus \lambda^r z^{-r} (\lambda^d z^{-d})^* Q_{d-1}(\lambda z^{-1}). \quad (17)$$

其中 P_{r-1} 是次数小于 r 的多项式, $(\lambda^d z^{-d})^* Q_{d-1}(\lambda z^{-1})$ 是既约单模真分式. (证明是定理 6, 7 和引理 5 的综合)

四、谱分析

1. 极点、谱半径

定义 6. $\lambda \in R$ 称为广义分式 $A^*(z^{-1})B(z^{-1})$ 的极点, 如果 $A(\lambda^{-1}) = e$.

定理 9. 设广义分式 $H = A^*B$ 的极点为 λ_0 , $y(k)$ 是 H 在等间隔输入 $u(k) = \lambda^k$ 下的响应, $\lambda \geq \lambda_0$, 则

$$y(k) = B(\lambda^{-1})\lambda^k, \quad k \geq \deg B. \quad (18)$$

证明. $U(z^{-1}) = (\lambda z^{-1})^*$, $A(z^{-1}) = \bigoplus_{i=1}^n a_i z^{-i}$, 由引理 2

$$Y = A^* B U = \left[\lambda z^{-1} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^n a_i z^{-i} \right) \right]^* B(z^{-1}), \quad (19)$$

令 $\lambda_i = \frac{a_i}{i}$, 则 $\lambda_0 = \bigoplus_{i=1}^n \lambda_i$. 由 $\lambda \geq \lambda_0$, 定理 5 用于式(19)右边得

$$Y = (\lambda z^{-1})^* B(z^{-1}), \quad y(k) = \left(\bigoplus_{i=0}^k b_i \lambda^{-i} \right) \lambda^k,$$

于是得(18)式.

定义 7. 设有理式 $H = \bigoplus_{i=1}^n A_i^* B_i$, 其中 $A_i^* B_i$ 是极点为 λ_i 的广义分式, 称 $\lambda_0 =$

$\bigoplus_{i=1}^n \lambda_i$ 为 H 的谱半径.

有理式展成广义分式和可能不唯一, 但谱半径是有理式的特征量, 决定其收敛域.

2. 收敛域

形式幂级数 $X(z^{-1}) = \bigoplus_{k \geq 0} x_k z^{-k}$ 中, 用 $\lambda \in R$ 取代形式变量, 得 E 上的级数

$$X(\lambda^{-1}) = \bigoplus_{k \geq 0} x_k \lambda^{-k}.$$

当级数收敛时, $X(\lambda^{-1}) < +\infty$; 级数发散时, $X(\lambda^{-1}) = +\infty$.

定理 10. 有理式的收敛域为闭区间 $[\lambda_0, +\infty)$, 其中 λ_0 是其谱半径.

证明. 根据定理 3, 设 $H(z^{-1})$ 如定义 7. $A_i^*(\lambda^{-1})B_i(\lambda^{-1}) < +\infty$ 当且仅当 $A_i(\lambda^{-1}) \leq e$, 等价于 $\lambda \geq \lambda_i$. 于是 $H(\lambda^{-1}) < +\infty$, 当且仅当 $\lambda \geq \lambda_0$. 证毕

有理传递函数在其收敛域内的取值有明确的物理意义.

定理 11. 设有理传递函数 $H(z^{-1})$ 的谱半径为 λ_0 , 给定等间隔输入 $u(k) = \lambda^k$, $\lambda \in [\lambda_0, +\infty)$, 则输出具有如下稳态:

$$y(k) = H(\lambda^{-1})\lambda^k, \quad k \text{ 充分大时} \quad (20)$$

证明. 应用定理 3 和定理 9.

3. 周期响应

定义 8. 序列 $x(k)$ 称为周期的, 如果

$$x(k+d) = cx(k), \quad (21)$$

等间隔序列 λ^k 又是周期序列的特例. 则一般周期序列表示如下:

$$x(k) = \bigoplus_{j=0}^{d-1} g(j)\delta(k-j, d)\lambda^k, \quad (22)$$

$$\delta(k, d) = \begin{cases} e, & k \equiv 0 \pmod{d} \\ \varepsilon, & \text{否则} \end{cases} \quad (23)$$

周期序列 Z -变换是单模广义分式

$$\begin{aligned} X(z^{-1}) &= (\lambda^d z^{-d})^* G_{d-1}(\lambda z^{-1}), \\ G_{d-1}(\lambda z^{-1}) &= \bigoplus_{j=0}^{d-1} g(j)\lambda^j z^{-j}. \end{aligned} \quad (24)$$

广义分式在周期输入下的响应是广义分式, 下面给出其事件域解, 包括瞬态和稳态. 注意到极点的周期域含义.

定理 12. 设广义分式 A^*B 的标准形如(17)式, 则 A^*B 的逆 Z -变换为

$$x(k) = \begin{cases} p_k \lambda^k, & k < r \\ \left[\bigoplus_{i=0}^{d-1} q_i \delta(k-r-i, d) \right] \lambda^k, & k \geq r \end{cases} \quad (25)$$

证明. 直接计算(25)式的 Z -变换.

应用定理 3, 11, 可写出有理式周期响应的事件域(封闭)表达式.

五、应用——最小实现与最优控制

如图 1 系统参数 $b_1 = b_2 = 0; a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 8; c_2 = 10, c_3 = 3$. 将参数代入(5)式, 应用定理 5, 6 得

$$H = [H_1, H_2] = (5z^{-1})^*[8, 6z^{-1}], \tag{26}$$

于是得最小实现如图 4(a) 所示。

在加工系统中,要求控制投料时间 u_1, u_2 使产品均匀输出,即 $y(k) = h\lambda^k, k \geq r$ 。且实现如下最优性能指标: 输出间隔 λ 最小; 输出延迟 h 最小; 在上述前提下, 占用缓冲器容量最省。即以尽可能大的 u_1, u_2 实现 λ, h 最小。因为输入延迟越长, 系统中滞留半成品越少。

H 的极点 $\lambda_0 = 5$ 是 λ 的下界, 令

$$u_i(k) = g_i 5^k, g_i \geq 0, i = 1, 2.$$

根据定理 9 得

$$y(k) = (8g_1 \oplus 1g_2)5^k, k \geq 1.$$

令 $8g_1 = 1g_2 = \min$, 得开环最优控制: $g_1 = 0, g_2 = 7$ 。最优输出 $y(k) = 8 \otimes 5^k$ 。

开环控制要求系统参数十分准确, 闭环控制具有对内外扰动的鲁棒性。令

$$\left. \begin{aligned} U_i &= f_i z^{-n_i} Y \oplus U_i^0 \\ U_i^0 &= \bigoplus_{k=0}^{n_i-1} u_i(k) z^{-k} \end{aligned} \right\}, i = 1, 2 \tag{27}$$

得闭环系统如图 4(b) 所示。

$$Y = [5z^{-1} \oplus 8f_1 z^{-n_1} \oplus 6f_2 z^{-(n_2+1)}]^*(8U_1^0 \oplus 6z^{-1}U_2^0). \tag{28}$$

应用定理 4, 令 $8f_1 5^{-n_1} = 6f_2 5^{-(n_2+1)} = e$ 。 n_1, n_2 是反馈网络的初始令牌 (token) 数, 应尽可能小, 因此

$$n_1 = 2, f_1 = 2; n_2 = 1, f_2 = 4, \tag{29}$$

代入(28)式得

$$Y = (5z^{-1})^*[8u_1(0) \oplus (8u_1(1) \oplus 6u_2(0))z^{-1}].$$

应用定理 5, 令 $8u_1(0) = 8u_1(1)5^{-1} = 6u_2(0)5^{-1} = \min$, 初始输入

$$u_1(0) = 0, u_1(1) = 5; u_2(0) = 7, \tag{30}$$

由(29)式知, 反馈律为

$$\left. \begin{aligned} u_1(k) &= 2y(k-2), k \geq 2 \\ u_2(k) &= 4y(k-1), k \geq 1 \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

(30), (31) 式构成最优闭环控制。

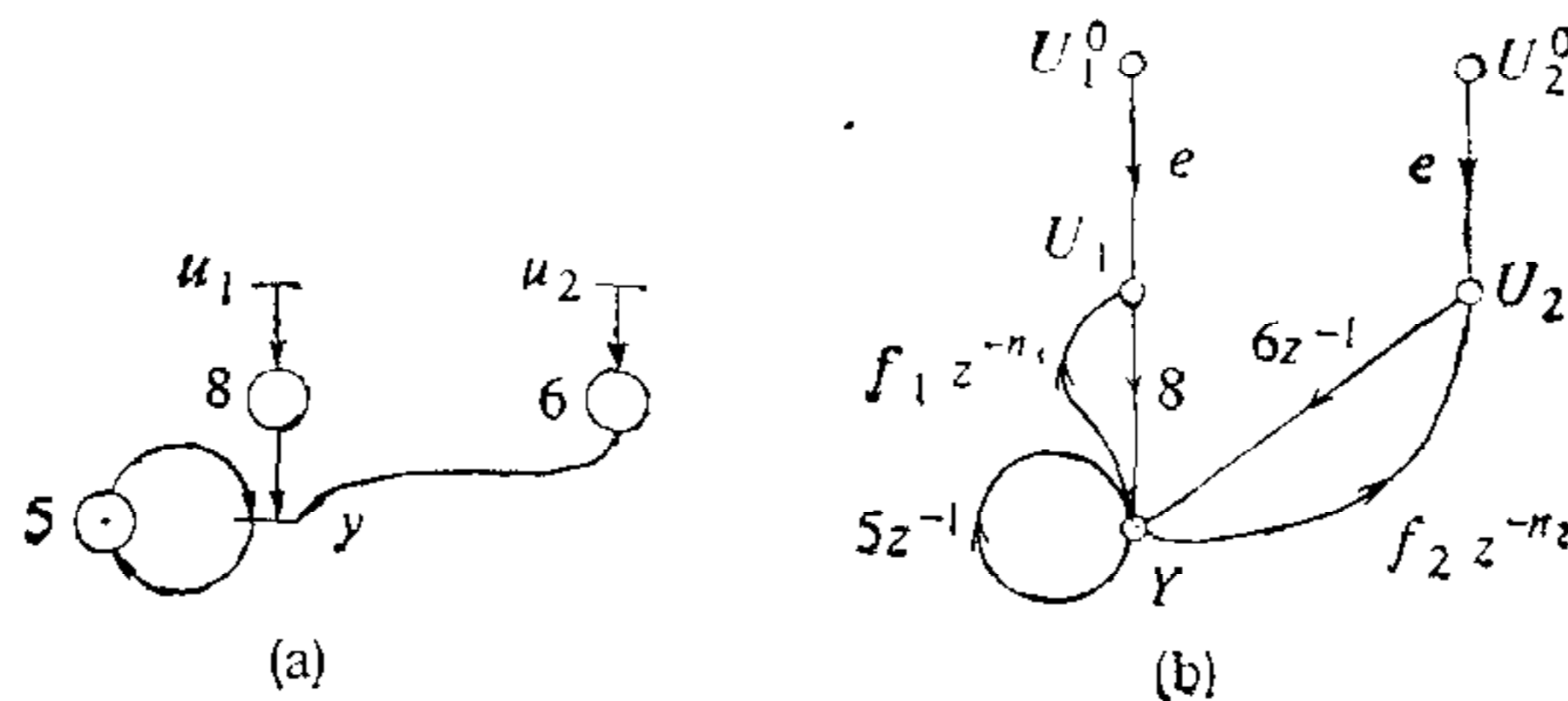


图 4

参 考 文 献

- [1] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J. P. and Viot, M., Linear System Theory for Discrete-Event Systems, 23rd IEEE conf. on Decision and Control, Las Vegas, NV, 1984, 539—544.

GENERALIZED-FRACTION APPROACH FOR DISCRETE-EVENT SYSTEMS

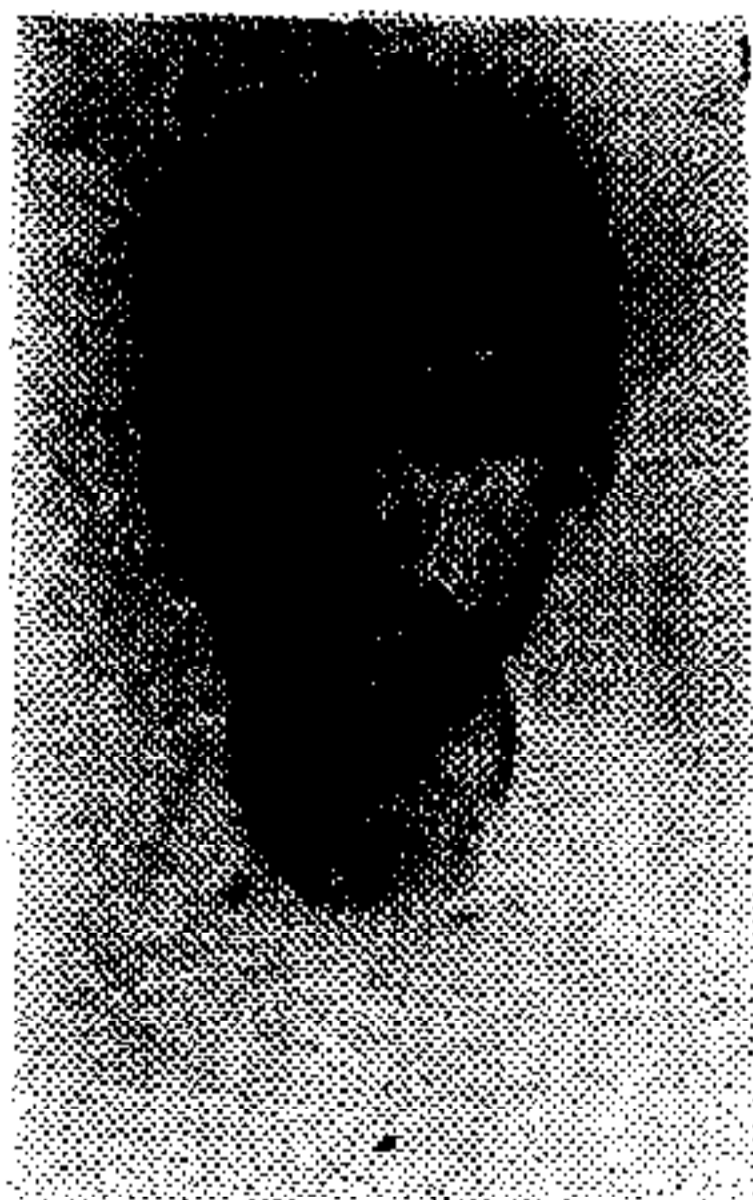
ZHU GENGXIN AND ZHENG DAZHONG

(Dept. of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084)

ABSTRACT

Concerning a class of discrete-event systems in Z-domain, rational expressions based on minimax algebra are introduced as a simple way for formulating transfer functions, which are infinite formal series by definition. A rational expression is transformed into sum of generalized fractions in design and analysis of a system. Reduction of a generalized fraction is discussed and its standard form given. Spectrum characteristics of a rational transfer function is studied with its connection to periodic response of the system. Applications such as minimal realization and optimal control are illustrated with an example.

Key words : discrete event; Z-domain description; spectrum analysis.



朱更新 1966年生于湖南邵阳。1989年毕业于清华大学自动化系,获工业自动化专业工科、应用数学专业理科双学士学位。同年被录取为自动化系硕士研究生,二年后考取直读博士生至今。

郑大钟 简介见本刊第18卷第2期。