离散事件动态系统稳定性分析方法

吴铁军 吕勇哉
（浙 江 大 学）

摘 要

本文提出一种受控时序 PETRI 网络方法以建立离散事件动态系统状态空间模型，并以此为基础给出一类离散事件系统的稳定性定义及一种新的稳定性分析方法.

关键词——离散事件动态系统，系统稳定性分析.

一、引 言

离散事件系统是一类新型的动态系统，具有与连续动态系统不同的特点，其动态行为不能用微分方程(或差分方程)予以描述. 在离散事件动态系统中，系统的演变由一系列活动以及这些活动的进行所需的资源之间错综复杂的关系所确定. 活动的发生需要一定量的资源；活动的结束引起资源量的改变，从而影响其他活动的发生. 一个活动的开始或结束对应于一个事件. 系统中资源的数量和活动的开始或结束时间随着一系列事件的出现而不断变化，是离散事件动态系统的主要特征.

常用的离散事件动态系统分析方法有排队网络[1]、离散事件仿真[2]、摄动分析[3]、PETRI 网络[4]、极大代数[5]等. 其中 COHEN 根据其应用极大代数建立的离散事件系统时序模型，首先从现代控制理论的角度研究了这一类系统的稳定性问题[5]，但其结果有待于进一步发展.

本文提出一种新的数学工具——受控时序 PETRI 网络来建立离散事件动态系统的数学模型，并以此为基础给出离散事件系统的稳定性定义. 然后引进系统不变量的概念获得系统稳定性的判定条件，从而能够解决 COHEN 的工作未能解决的问题.

二、基本定义和术语

多元组 $N_t=(P, T, F; \boldsymbol{c}, \tau, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{m})$ 称为时序 PETRI 网络[4]，其中：

• (P, T, F) 为一有限网络. 结点集合 P 的元素称为位置，结点集合 T 的元素称为转移，$P\neq\phi$，$T\neq\phi$，$P\cap T=\phi$；F 是位置和转移之间的关联关系的集合，

$$F\subset(P\times T)\cup(T\times P).$$

• $\boldsymbol{c}: P\rightarrow \boldsymbol{N}\cup\{\omega\}$ 为位置具有的容量，其中符号 ω 满足 $\forall n\in \boldsymbol{N}, n<\omega$.

• τ: $T\rightarrow[0, +\infty)$ 为转移具有的时间系数.

本文于1988年3月8日收到.

- $\boldsymbol{w}$: $F \to \boldsymbol{N}\backslash\{0\}$ 为关联关系所对应的权系数.
- $\boldsymbol{m}$: $P \to \boldsymbol{N}\cup\{\omega\}$ 为网络的状态.

为了表达的方便，用 $I(t)$ 和 $O(t)$ 分别表示转移 t 的上游位置集合与下游位置集合,即:

$$\forall t\in T,\ I(t)=\{p\in P\,|\,(p,\ t)\in F\}, \tag{1}$$

$$\forall t\in T,\ O(t)=\{p\in P\,|\,(t,\ p)\in F\}, \tag{2}$$

对于转移 $t\in T$，若满足

$$\forall p\in I(t),\ \boldsymbol{m}(p)\geqslant \boldsymbol{w}(p,\ t), \tag{3}$$

$$\forall p\in O(t),\ \boldsymbol{m}(p)\leqslant \boldsymbol{c}(p)-\boldsymbol{w}(t,\ p), \tag{4}$$

则称 t 在状态 $\boldsymbol{m}$ 下是可启动的. t 的启动在 $\tau(t)$ 时间间隔后产生新状态 $\boldsymbol{m}'$,满足

$$\forall p\in P,\ \boldsymbol{m}'(p)=\begin{cases}\boldsymbol{m}(p)-\boldsymbol{w}(p,t), & \text{若}\ p\in I(t)\backslash O(t);\\ \boldsymbol{m}(p)+\boldsymbol{w}(t,p), & \text{若}\ p\in O(t)\backslash I(t);\\ \boldsymbol{m}(p)-\boldsymbol{w}(p,t)+\boldsymbol{w}(t,p), & \text{若}\ p\in I(t)\cup O(t);\\ \boldsymbol{m}(p), & \text{其他}.\end{cases} \tag{5}$$

由一系列可启动转移组成的序列称为可行启动序列.对于网络状态 $\boldsymbol{m}$，若该网络的每一转移必属于某一可行启动序列,则称该网络状态是活的. 在时序 PETPI 网络中,若存在转移 $t_1,\ t_2\in T$ 具有公共的上游位置或下游位置,则称 t_1 和 t_2 是互相冲突的,这些公共位置称为冲突点. 不存在冲突点的网络称为无冲突网络. 在无冲突网络中，任一网络状态下的可行启动序列都是唯一确定的.

三、系统状态方程

在离散事件动态系统中，发生与否仅由系统状态(资源量)决定的活动称为非受控活动;发生与否不但与系统状态有关,且受到外界控制的活动称为受控活动.

为了从数学上定量地描述离散事件系统的动态过程，本文将时序 PETRI 网络加以推广,使其能更明确地表达外界干预对网络状态的作用.

定义 1. 时序 PETRI 网络 $N_c=(P,\ T,\ F;\ \boldsymbol{c},\ \tau,\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{m})$ 称为受控时序 PETRI 网络,若满足:

1) $T=T_C\cup T_I$，其中 T_C 中的元素称为受控转移，T_I 中的元素称为非受控转移，$T_C\cap T_I=\phi$，$T_I\neq\phi$;

2) 记 $P_c\subset P$ 为 N_c 中所有冲突点的集合，则 $\forall p\in P_c$ 和 $\forall t\in T$，若 $(t,\ p)\in F$ 或 $(p,\ t)\in F$，则 $t\in T_c$;

3) 每一受控转移启动的条件是 a) 满足式(3)和式(4)；b) 外界允许启动;

4) 每一非受控转移启动的条件是满足式(3)和式(4);

5) 所有转移启动的结果满足式(5).

若删去受控时序 PETRI 网络 N_c 中所有的受控转移以及与之有关的关联关系，则得到 N_c 的一个子网络,称为 N_c 的基网络 N_o. 基网络 N_o 有以下性质:

定理 1. N_o 是无冲突网络.

证明. 根据定义 1，所有与 N_c 中冲突点有关的转移都是受控转移，而 N_o 是 N_c 的子网络且不含受控转移，故 N_o 是无冲突的. 证毕.

现定义离散事件动态系统 S 和受控时序 PETRI 网络 N_c 的对应关系如下：

- S 中受控(非受控)活动集合对应于 N_c 中受控(非受控)转移集合；
- S 中每一活动的开始(结束)所占用(释放) 的资源种类和数量用 N_c 中该活动所对应的转移的上游(下游)位置集合以及相应的关联关系的权系数来表示；
- S 中每一活动的进行所消耗的时间对应于 N_c 中相应转移的时间系数；
- S 中所允许的最大资源量对应于 N_c 中位置的容量；
- S 的状态对应于 N_c 的网络状态.

根据以上对应关系，若以指标 k 表示网络中转移的第 k 次启动，可写出以下网络状态转移方程：

$$\boldsymbol{m}(k)=\boldsymbol{m}(k-1)+H\cdot\boldsymbol{v}(k),\ \boldsymbol{m}(0)=\boldsymbol{m}, \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{m}(k)$ 为转移第 k 次启动前的网络状态，而 H: $P\times T\to\boldsymbol{z}$ 以及 $\boldsymbol{v}$: $T\to\{0,1\}$ 分别称为网络矩阵和启动向量，满足

$$\forall p\in P,\forall t\in T,H(p,t)=\begin{cases}-\boldsymbol{w}(p,t), & \text{若 } p\in I(t)\backslash O(t);\\ \boldsymbol{w}(t,p), & \text{若 } p\in O(t)\backslash I(t);\\ \boldsymbol{w}(t,p)-\boldsymbol{w}(p,t), & \text{若 } p\in I(t)\cup O(t);\\ 0, & \text{其他.}\end{cases} \tag{7}$$

$$\forall t\in T,\ \boldsymbol{v}(t)=\begin{cases}1, & \text{若 } t \text{ 是可启动的;}\\ 0, & \text{其他.}\end{cases} \tag{8}$$

不失一般性，设启动向量 $\boldsymbol{v}$ 具有以下形式：

$$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{z}$: $T_I\to\{0,1\}$ 称为非受控启动向量，$\boldsymbol{u}$: $T_c\to\{0,1\}$ 称为受控启动向量，则式(6)可改写为

$$\boldsymbol{m}(k)=\boldsymbol{m}(k-1)+H_z\cdot\boldsymbol{z}(k)+H_u\cdot\boldsymbol{u}(k),\ \boldsymbol{m}(0)=\boldsymbol{m}, \tag{10}$$

其中 $[H_z\vdots H_u]=H$. 事实上 H_z 即网络 N_c 的基网络 N_0 的网络矩阵. 应指出，当网络状态 $\boldsymbol{m}(k-1)$ 给定时，$\boldsymbol{z}(k)$ 的值是唯一确定的.

定理 2. 非受控启动向量的值由当时的网络状态唯一确定.

证明. 非受控启动向量对应于非受控转移，即基网络的转移集合. 由定理 1 知 N_o 是无冲突网络，故在任何网络状态下转移的启动唯一确定. 证毕.

由定理 2，式(10)可进一步表示为

$$\boldsymbol{m}(k)=A[\boldsymbol{m}(k-1)]+B\cdot\boldsymbol{u}(k),\ \boldsymbol{m}(0)=\boldsymbol{m}, \tag{11}$$

其中

$$A[\boldsymbol{m}(k-1)]\triangleq\boldsymbol{m}(k-1)+H_z\cdot\boldsymbol{z}[\boldsymbol{m}(k-1)], \tag{12}$$

$$B\triangleq H_u. \tag{13}$$

式(11)是离散事件动态系统的状态方程. 与连续动态系统相似，当 $\boldsymbol{u}(k)=0$ 时，由方程

$$m(k) = A[m(k-1)],\ m(0) = m \tag{14}$$

描述的系统称为自治系统.

四、稳定性定义

为引进离散事件动态系统稳定性的概念,考察机械加工系统的生产过程. 在这类系统中,工件按给定的生产计划和工艺不断进入系统并在各加工装置上加工和传递,最后加工完毕离开系统. 在各加工装置之间一般设有工件缓冲区以保证生产的均衡进行. 当各加工装置的加工能力和工件传递路线安排不当时,可造成工件在缓冲区内积压,直至引起生产停顿或生产节奏混乱. 因此从稳定生产的角度来说，对一机械加工系统提出的要求是：在正常生产情况下(无设备故障、原料短缺或产品积压等)应满足

- 系统内不发生工件不断积压现象；
- 系统生产具有稳定的时间周期.

一般地,考虑无外界干预的离散事件动态系统. 由于系统内资源量的变化和各活动发生时间所构成的时间序列反映了系统动态特性的两个不同侧面，因此可将系统在给定初始条件下,使资源量的变化不越出一定范围,以及使各活动的发生具有稳定的时间周期的能力,作为离散事件动态系统稳定性的量度. 记以式(14)描述的自治系统为 S_a.

定义 2. 给定系统 S_a. 若对于初始状态 $m(0) = m_0$ 和所有的 $k \in N$, 存在向量 $m_e \in N^n$, 并满足

$$m(k) \leqslant m_e, \tag{15}$$

则称 S_a 在状态 m_0 下是状态稳定的. 若 S_a 在任意状态下是状态稳定的，则称 S_a 是状态稳定的.

定义 3. 给定系统 S_a. 记时间向量 $x(k) = [x_1(k), \cdots, x_m(k)]^T$ 为系统内各活动第 k 次开始发生的时间. 若对于初始时间 $x(0) = x_0$, 存在 $k_0 \in N$, $d \in N$ 和 $x_e \in R_+^m$, 当 $k > k_0$ 时有

$$x(k+d) - x(k) = x_e, \tag{16}$$

则称 S_a 在 x_0 下是时间稳定的. 若 S_a 在任意 x_0 下是时间稳定的,则称 S_a 是时间稳定的.

五、稳定性分析方法

首先在状态方程的基础上引进系统不变量的概念.

定义 4. 给定系统 S_a. 对于状态方程式(14),若存在向量 v_s, 满足

$$H_z^T \cdot v_s = 0, \tag{17}$$

则称 v_s 为 S_a 的状态不变量.

定义 5. 给定系统 S_a. 对于状态方程式(14),若存在向量 v_t, 满足

$$H_z \cdot v_t = 0, \tag{18}$$

则称 v_t 为 S_a 的时间不变量.

应用状态不变量可获得离散事件动态系统状态稳定性的判定条件.

定理 3. 对于系统 S_a，若存在状态不变量 $\boldsymbol{v}_s=[v_{s,1},\cdots,v_{s,n}]^T$，满足

$$v_{s,i}>0,\ 1\leqslant i\leqslant n, \tag{19}$$

则 S_a 是状态稳定的.

证明. 设系统 S_a 的状态向量 $\boldsymbol{m}(k)=[m_1(k),\ \cdots,\ m_n(k)]^T$，$m_i(k)\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant n$，则当式(19)成立时，有

$$\forall k\in \boldsymbol{N},\quad m_i(k)\cdot v_{s,i}\leqslant \sum_{j=1}^{n} m_j(k)\cdot v_{s,j}=\boldsymbol{m}^T(k)\cdot \boldsymbol{v}_s,\ 1\leqslant i\leqslant n. \tag{20}$$

又由式(14)及式(17)，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}^T(k)\cdot \boldsymbol{v}_s&=\boldsymbol{m}^T(k-1)\cdot \boldsymbol{v}_s+\boldsymbol{z}^T[\boldsymbol{m}(k-1)]\cdot H_z^T\cdot \boldsymbol{v}_s\\&=\boldsymbol{m}^T(k-1)\cdot \boldsymbol{v}_s=\cdots=\boldsymbol{m}^T(0)\cdot \boldsymbol{v}_s.\end{aligned} \tag{21}$$

由式(19)、(20)和(21)即有

$$m_i(k)\leqslant \boldsymbol{m}^T(0)\cdot \boldsymbol{v}_s\cdot v_{s,i}^{-1}\triangleq m_{e,i},\ 1\leqslant i\leqslant n. \tag{22}$$

证毕.

给定自治系统 S_a，其状态方程为式(14). 若另有系统 S_a'，其状态方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}'(k)&=A'[\boldsymbol{m}(k-1)]\\&=\boldsymbol{m}'(k-1)-H_z\cdot \boldsymbol{z}'[\boldsymbol{m}'(k-1)],\ \boldsymbol{m}'(0)=-\boldsymbol{m},\ \forall k,\ -\boldsymbol{m}'(k)\in \boldsymbol{N}^n,\end{aligned} \tag{23}$$

则 S_a' 称为 S_a 的逆系统.

其次在系统 S_a 中，若对于给定的初始状态 $\boldsymbol{m}(0)=\boldsymbol{m}_0$ 和另一状态 $\boldsymbol{m}_f$，存在 $k_f>0$，使有 $\boldsymbol{m}(k_f)=\boldsymbol{m}_f$，且 $\forall k$，$\boldsymbol{m}(k)\geqslant 0$，则称对 S_a 状态 $\boldsymbol{m}_f$ 是从 $\boldsymbol{m}_0$ 可达的. 在一般情况下，参照 KOSARAJU 给出的关于 PETRI 网络可达性的条件[6]有:

引理 1. 设自治系统 S_a 的逆系统为 S_a'. 若对于 S_a 的状态 $\boldsymbol{m}_0$ 和 $\boldsymbol{m}_f$，满足以下条件:

1) $\exists \boldsymbol{z}\in \boldsymbol{N}^m$，$\boldsymbol{m}_f-\boldsymbol{m}_0=H_z\cdot \boldsymbol{z}$，

2) $\exists \Delta_1\geqslant E$，使对于 S_a，$\boldsymbol{m}_0+\Delta_1$ 是从 $\boldsymbol{m}_0$ 可达的，

3) $\exists \Delta_2\geqslant E$，使对于 S_a，$-\boldsymbol{m}_f+\Delta_2$ 是从 $-\boldsymbol{m}_f$ 可达的，

4) $\exists \boldsymbol{z}\in \boldsymbol{N}^m$，$\Delta_2-\Delta_1=H_z\cdot \boldsymbol{z}$，

则对于系统 S_a，M_f 是从 M_0 可达的.

在以上引理中，向量 E 的所有元素均为 1. 引理的证明可参见文 [6]. 若对于系统 S_a，$\boldsymbol{m}_f$ 是从 $\boldsymbol{m}_0$ 可达的，则称 $\boldsymbol{m}_0$ 是可重复的. 引理 2 指出可重复状态与系统时间不变量有关.

引理 2. 给定自治系统 S_a，则当且仅当系统时间不变量 $\boldsymbol{v}_t>0$ 时，S_a 存在可重复状态.

引理 2 的证明见附录. 现以定理 4 说明，离散事件动态系统的时间稳定性与时间不变量有关.

定理 4. 给定系统 S_a. 若对于初始状态 $\boldsymbol{m}(0)=\boldsymbol{m}_0$，

1) S_a 存在可重复状态 $\boldsymbol{m}^*$，

2) $\boldsymbol{m}^*$ 是从 $\boldsymbol{m}_0$ 可达的，

则系统 S_a 在 $\boldsymbol{m}_0$ 下是时间稳定的。

证明。由于自治系统可对应于一个无冲突网络，故在任何网络状态下的可行启动序列是唯一的。记从 $\boldsymbol{m}_0$ 出发的可行启动序列为 σ，对应唯一的状态轨迹 π，则当系统状态从 $\boldsymbol{m}_0$ 达到 $\boldsymbol{m}^*$ 后，形成循环启动序列和循环状态轨迹

$$\Sigma = \{\sigma, \sigma, \cdots\}, \tag{24}$$

$$\Pi = \{\pi, \pi, \cdots\}. \tag{25}$$

因此 σ 中所有转移的启动时间是周期性的。证毕。

附　　录

引理 2 的证明．首先指出，若设 $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2 \in \boldsymbol{z}^n$，则当且仅当 $\exists \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{N}^m$，$\boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{m}_1 + H_z \cdot \boldsymbol{v}$ 时，对于 S_a，$\exists \boldsymbol{m}^* \in \boldsymbol{N}^n$，$\boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}^*$ 是从 $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}^*$ 可达的．事实上，若 $\boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}^*$ 从 $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}^*$ 可达，则

$$\exists k_f \in \boldsymbol{N}, \boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}^* = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}^* + H_z \cdot \sum_{k=1}^{k_f} \boldsymbol{z}(k), \tag{A-1}$$

其中 $\boldsymbol{z}(k) = [z_1(k), \cdots, z_m(k)]^T$，$z_i(k) \in \{0, 1\}$，$0 \leqslant k \leqslant k_f$，$1 \leqslant i \leqslant m$．若令

$$\boldsymbol{v} = \sum_{k=1}^{k_f} \boldsymbol{z}(k), \tag{A-2}$$

即有

$$\boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{m}_1 + H_z \cdot \boldsymbol{v}. \tag{A-3}$$

反之设式 (A-3) 对于 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{N}^m$ 成立．由式 (A-2)，对 k_f 施以归纳．当 $k_f = 0$ 时，有 $\boldsymbol{v} = 0$，则由式 (A-3)，对任意 $\boldsymbol{m}^*$，$\boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}^*$ 是从 $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}^*$ 可达的．现设当 $k_f > 0$，$k_f - 1$ 时 $\exists \boldsymbol{m}^*$，$\boldsymbol{m}_2' + \boldsymbol{m}^*$ 是从 $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}^*$ 可达的，其中

$$\boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{m}_1 + H_z \cdot \sum_{k=1}^{k_f-1} \boldsymbol{z}(k),$$

则当 k_f 时，由于

$$\boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}^* = \boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}^* + H_z \cdot \boldsymbol{z}(k_f), \tag{A-4}$$

即 $\boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}^*$ 是从 $\boldsymbol{m}^* + \boldsymbol{m}_2'$ 可达的，则 $\boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}^*$ 是从 $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}^*$ 可达的．

根据以上结果，若令 $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = 0$，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_t$，则由于时间不变量 $\boldsymbol{v}_t$ 满足式 (18)，则式 (A-3) 成立．于是 $\exists \boldsymbol{m}^* \in \boldsymbol{N}^n$，$\boldsymbol{m}^*$ 是从 $\boldsymbol{m}^*$ 可达的，即 $\boldsymbol{m}^*$ 是可重复的．反之若 $\boldsymbol{m}^*$ 是从 $\boldsymbol{m}^*$ 可达的，设 $\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{m}_2 = 0$，则 $\boldsymbol{m}_2 + \boldsymbol{m}^*$ 是从 $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}^*$ 可达的．由式 (A-3)，必有 $H_z \cdot \boldsymbol{v} = 0$，且 $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{N}^m$．故 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_t$ 为系统时间不变量．证毕．

参　考　文　献

[1] 曹希仁，离散事件动态系统，自动化学报，**11**(1985)，438—447.

[2] Garzia, R. F., et al., Discrete Event Simulation, *IEEE Spectrum*, Dec. 1986, 32—36.

[3] Ho, Y. C. and Cassandras, C., A New Approach to the Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, *Automatica*, **19**(1983), 149—167.

[4] Zuberek, W. M., Timed Petri Nets and Preliminary Performence Evaluation, Proceedings of the 7th Annual Symposium on Computer Architecture, 1980, 88—96.

[5] Cohen, G., Linear-System-theoretic View of Discrete-event Processes and Its Use for Performence Evaluation in Manufacturing, *IEEE Transaction on Automatic Control*, **AC-30**(1985), 210—220.

[6] Kasaraju, S. R., Decidability of Reachability in Vector Addition Systems, Proceedings of the 4th Annual ACM Symposium, 1982, 267—281.

STABILITY ANALYSIS OF DISCRETE EVENT DYNAMIC SYSTEMS

Wu Tiejun Lu Yongzai
(Zhejiang University)

ABSTRACT

This paper proposes a controlled timed PETRI method to establish the state space model for the discrete event dynamic system. Then, based on such model, definitions of stability will be given and a method for stability analysis will be developed for one type of such systems.

Key words ——Discrete event dynamic systems; system stability analysis.