

# 控制系统计算机代数工具 Symbol CAD<sup>1)</sup>

杨光宇 郑应平

(中国科学院自动化研究所 北京 100080)

**摘要** 研究控制系统计算机辅助设计的计算机代数方法,概要叙述了控制系统计算机代数工具 Symbol CAD 的设计方法和设计结构. Symbol CAD 使用面向对象方法,采用图形窗口环境,具有符号运算和数值计算能力,可以进行适合控制系统分析和设计的算法编程,具有系统扩充功能.

**关键词** 计算机代数,控制系统,控制系统 CAD,面向对象方法,软件工具.

## 1 引言

计算机代数方法在复杂控制系统理论中的应用是当今研究的热点之一<sup>[1]</sup>. 本文通过对控制系统计算机辅助设计和计算机代数方法的深入研究,给出了一种具有计算机代数功能的控制系统计算机辅助设计软件工具的设计方法,并概要性地介绍了用该方法设计和开发的软件工具——Symbol CAD. 该软件工具使用面向对象方法和图形窗口环境,适合控制系统分析和设计,并具有符号计算和数值计算功能.

## 2 Symbol CAD 的设计方法

Symbol CAD 是一个可以进行符号计算与数值分析相结合的控制系统的辅助分析和设计软件工具,该软件工具是用 Visual C++ V1.5 编程语言开发完成的,并运行于 IBM PC/486 和 WINDOWS3.1 环境下. 它的主要特点是:可以进行符号计算和数值分析,可以用于控制系统分析和设计,可以进行符号算法编程,可以输出多种形式的计算结果,具有友好的用户界面和系统可扩充性.

Symbol CAD 共有七个功能模块,它们分别是:文档编辑器,符号计算工具箱,符号算法库,控制系统符号分析器,符号核心算法库,信息管理器和在线帮助手册.

### 2.1 系统总体设计结构

Symbol CAD 工具利用 Visual C++ 编程语言提供的 MFC 类库,继承了窗口框架、文档和视类结构,并采用多文档类型,它的总体结构框如图 1 所示.

### 2.2 控制系统符号分析器设计结构

控制系统符号分析器是 Symbol CAD 中用于控制系统设计和系统分析的主要模块. 它的组织形式以控制系统模型为基本单位,一个控制系统模型对应一个文档和视结构,并

1)国家自然科学基金资助课题.

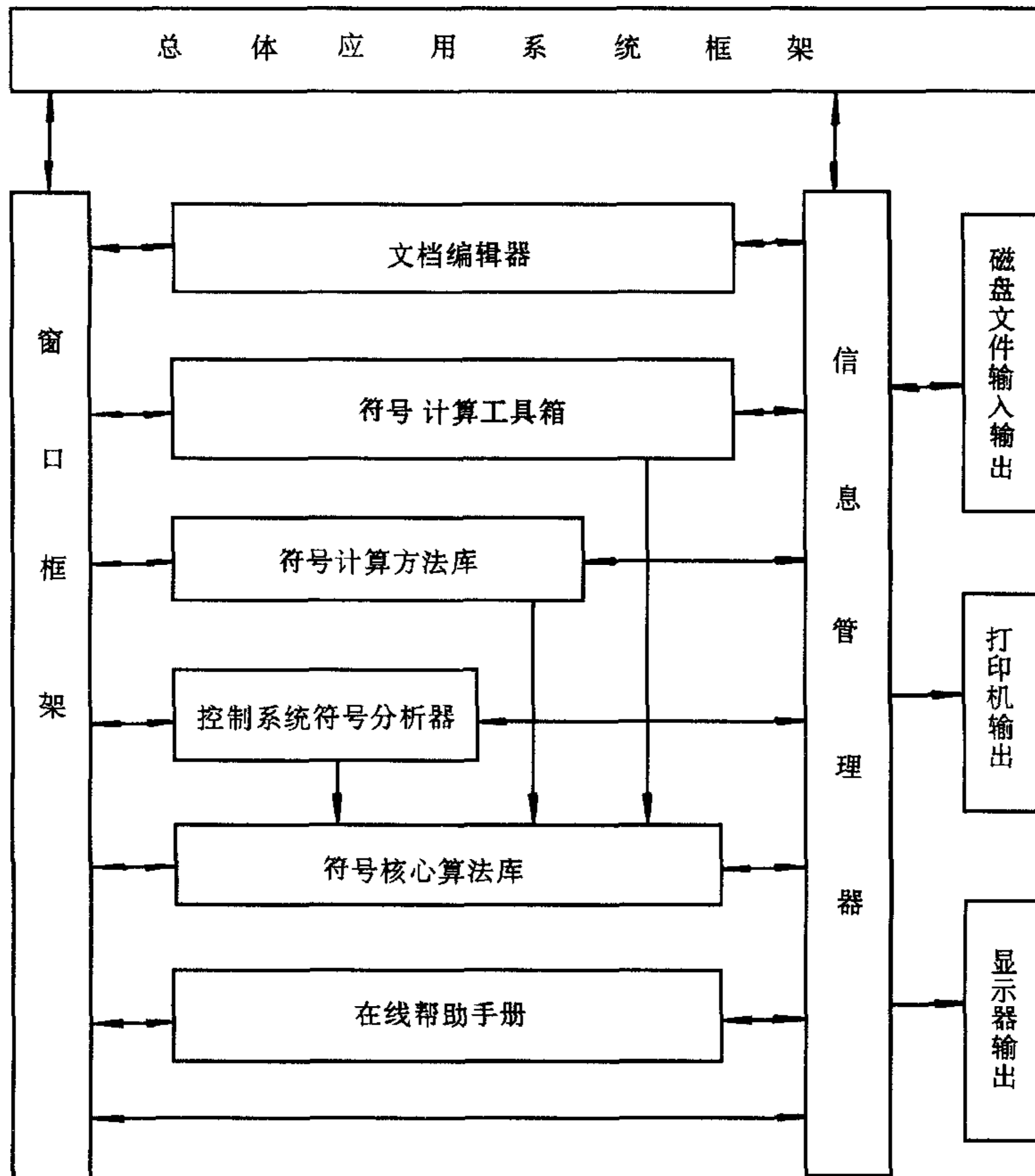


图 1 Symbol CAD 总体结构框图

且可以同时处理多个模型. 由于控制系统模型的多样性, 将系统设计成一个实例可以同时开设多个不同类型的模型, 每一类模型拥有各自不同的分析设计方法. Symbol CAD 控制系统符号分析器的结构如图 2 所示.

### 2.3 系统设计过程中的面向对象方法

管理控制系统分析和设计的类结构主要由模型类和方法类组成. 在这种面向对象的软件设计与开发方法中, 建立这种类结构是为了更好地适应控制系统分析和设计的需求. 采用这种方法, 可以使

1) 任何一个具体的控制系统模型都对应于某一个模型类的一个对象, 每个模型类的对象都是一个封装好的、功能完备的组件; 控制系统的不同类型对应不同的模型类, 但是所有的模型类派生于同一个抽象基类;

2) 针对某个控制系统模型的任何一个具体分析和设计方法都对应于某一个方法类的一个对象, 每一个方法类也是一个封装好的、功能完备的组件; 方法类的对象从属于模型类对象, 不同模型类所属的方法类各不相同; 每一个模型类都对应多个分析和设计方法, 即方法类, 但是所有方法类也派生于同一个抽象基类;

3) 模型类的对象从属于文档类对象, 任何一个文档类对象都包含一个模型类对象, 这个模型类对象是动态生成的, 可以是任何一种模型类.

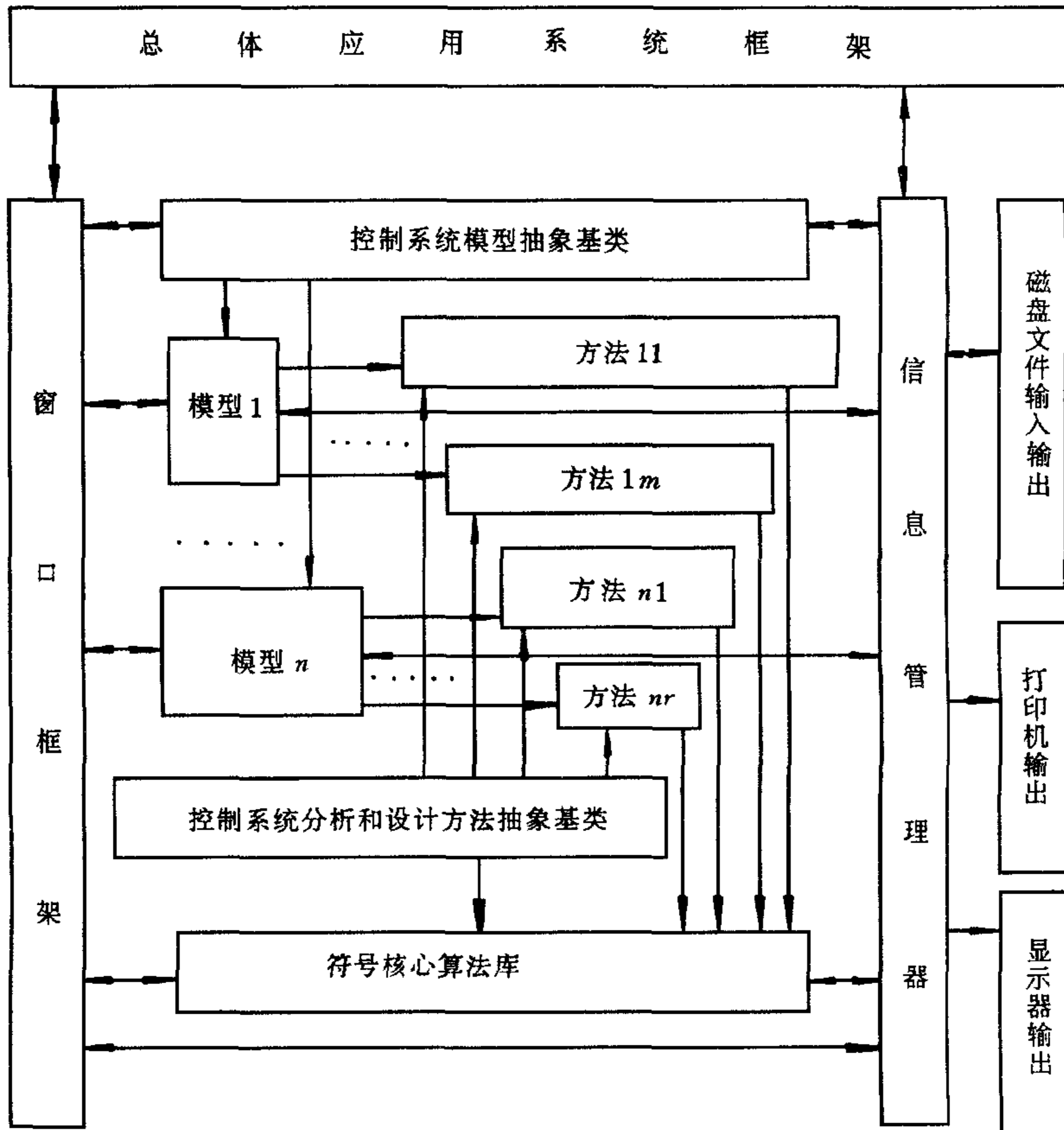


图 2 Symbol CAD 控制系统分析器结构框图

### 3 根轨迹的计算机代数分析方法

根轨迹的代数方法和计算机辅助方法有多种<sup>[8,12]</sup>。下面以文献[8]的方法为主,分别给出根轨迹解析表达式和计算机代数分析方法。

#### 3.1 复平面上的根轨迹方程

假设我们只关心如图 3 所示的负反馈系统结构的闭环极点根轨迹,开环传递函数  $G(s)$  是  $s$  的一个实域多项式函数,也就是说,这里所分析的系统是一个线性的、集中参数的有限系统。假设  $N(s)$  是传递函数  $G(s)$  的分子多项式,它的阶数为  $n$ ;  $D(s)$  是传递函数  $G(s)$  的分母多项式,它的阶数是  $d$ ;  $N(s)$  和  $D(s)$  都是系数首一的。因此,开环系统传递函数可以写成

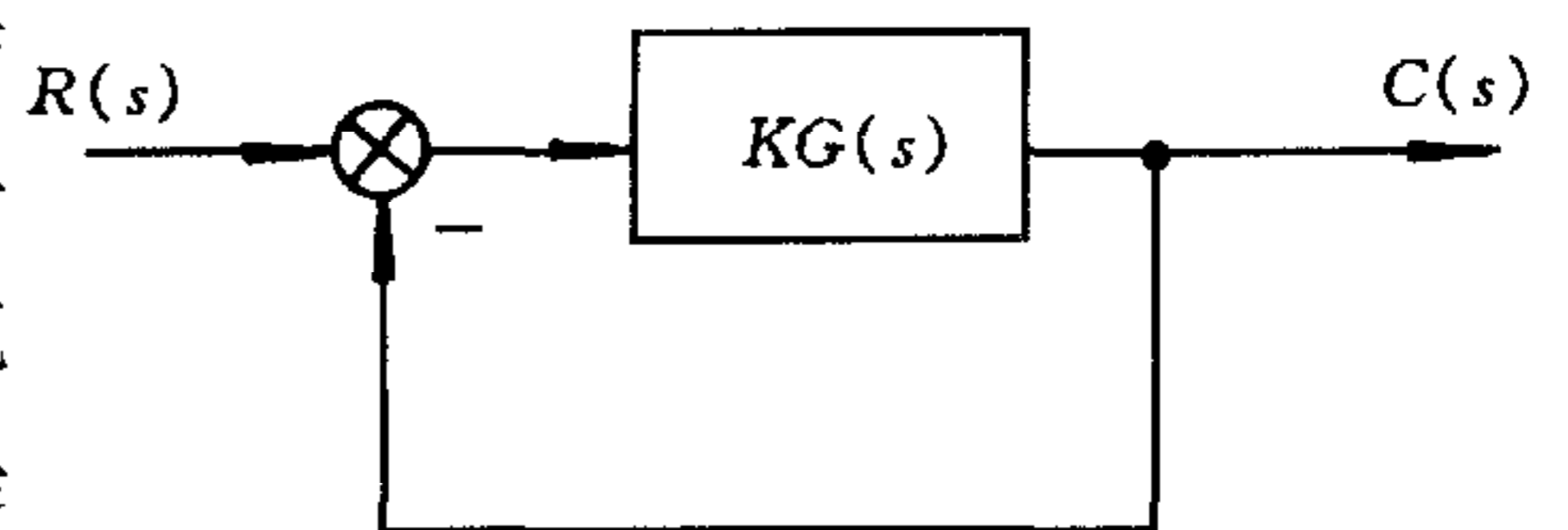


图 3 单位反馈系统

$$KG(s) = K \frac{N(s)}{D(s)} = K \frac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{s^d + b_{d-1}s^{d-1} + \dots + b_0} = K \frac{\sum_{k=0}^n a_k s^k}{\sum_{l=0}^d b_l s^l}, \quad (1)$$



这里  $a_k$  和  $b_l$  都是实数, 且  $a_n = b_d = 1$ .

对于给定的开环传递函数  $G(s)$  和常数放大系数  $K$ ,  $K$  取所有的实数值, 即  $-\infty < K < \infty$ , 闭环系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}. \quad (2)$$

因此, 对于某个  $K$  值, 闭环极点由下面方程决定:

$$1 + KG(s) = 0. \quad (3)$$

为了得到  $\sigma$  和  $\omega$  表示的根轨迹方程, 可以采用将  $N(s)$  和  $D(s)$  按  $j\omega$  的幂级数展开的方法<sup>[9]</sup>. 由于  $N(s)$  在  $s$  平面上解析, 并且可以用一个关于任何  $\sigma$  在一个无限收敛半径的 Taylor 级数展开获得一致性

$$N(\sigma + j\omega) = N(\sigma) + j\omega \frac{N'(\sigma)}{1!} + (j\omega)^2 \frac{N''(\sigma)}{2!} + \dots + (j\omega)^n \frac{N^{(n)}(\sigma)}{n!}. \quad (4)$$

将表达式的实部和虚部分组后有

$$N(\sigma + j\omega) = \left[ N(\sigma) - \omega^2 \frac{N''(\sigma)}{2!} + \dots \right] + j\omega \left[ \frac{N'(\sigma)}{1!} - \omega^2 \frac{N'''(\sigma)}{3!} + \dots \right]. \quad (5)$$

同理可以有

$$D(\sigma + j\omega) = \left[ D(\sigma) - \omega^2 \frac{D''(\sigma)}{2!} + \dots \right] + j\omega \left[ \frac{D'(\sigma)}{1!} - \omega^2 \frac{D'''(\sigma)}{3!} + \dots \right]. \quad (6)$$

令

$$N_R(\sigma, \omega) = N(\sigma) - \omega^2 \frac{N''(\sigma)}{2!} + \omega^4 \frac{N^{(4)}(\sigma)}{4!} + \dots, \quad (7)$$

$$N_I(\sigma, \omega) = N'(\sigma) - \omega^2 \frac{N'''(\sigma)}{3!} + \omega^4 \frac{N^{(5)}(\sigma)}{5!} + \dots, \quad (8)$$

$$D_R(\sigma, \omega) = D(\sigma) - \omega^2 \frac{D''(\sigma)}{2!} + \omega^4 \frac{D^{(4)}(\sigma)}{4!} + \dots, \quad (9)$$

$$D_I(\sigma, \omega) = D'(\sigma) - \omega^2 \frac{D'''(\sigma)}{3!} + \omega^4 \frac{D^{(5)}(\sigma)}{5!} + \dots. \quad (10)$$

系统开环传递函数可表示为

$$G(s) = \frac{N_R(\sigma, \omega) + j\omega N_I(\sigma, \omega)}{D_R(\sigma, \omega) + j\omega D_I(\sigma, \omega)}.$$

此时(3)式可以写成

$$1 + K \frac{N_R(\sigma, \omega) + j\omega N_I(\sigma, \omega)}{D_R(\sigma, \omega) + j\omega D_I(\sigma, \omega)} = 0 \quad (11)$$

或

$$\begin{cases} D_R(\sigma, \omega) + KN_R(\sigma, \omega) = 0, \\ j\omega [D_I(\sigma, \omega) + KN_I(\sigma, \omega)] = 0. \end{cases} \quad (12)$$

联立方程(12)完全代表了一个标准的根轨迹. 由(12)式可以解得

$$K = -\frac{D_R}{N_R} = -\frac{D_I}{N_I}, \quad (13)$$

$$D_R N_I = N_R D_I. \quad (14)$$

(14)式就是表示闭环根轨迹的代数方程. 值得注意的是, 由于(12)式第二等式中  $\omega$  是它

的一个因子,只有当  $\omega \neq 0$  时,才有  $K = -D_I/N_I$ ,所以由(14)式表示的根轨迹不包括实轴上的根轨迹.同时,由于  $K$  可以取任意实数,所以(14)式所表示的根轨迹是  $-\infty < K < 0$  的正反馈闭环系统和  $0 < K < \infty$  的负反馈闭环系统根轨迹的总和.

由于 4 阶以下的代数方程可以得到解析解,因此,用计算机代数方法可以得到低阶系统精确的根轨迹方程.根据(14)式,若以  $\sigma$  为自变量,则对于开环传递函数零极点之和小于或等于 6 的系统,都可以使用本方法得到根轨迹的精确表达式和图形.

当  $K$  值给定时,如  $K = k$ ,由(13)式有

$$\begin{cases} D_R + kN_R = 0, \\ D_I + kN_I = 0, \end{cases} \quad (15)$$

方程组(15)将给出  $K = k$  时的系统闭环极点.

### 3.2 软件设计

根轨迹代数方程算法由下列函数组成,它们分别是

- 1) RootLoci, 根据系统传递函数,计算根轨迹方程、开环零极点和根轨迹分离点;
- 2) ldisplay, ddisplay, 绘制根轨迹图;
- 3) makepoly, 得到根轨迹方程;
- 4) getrange, 得到根轨迹图在实轴上的取值范围;
- 5) makefunction, 根据系统传递函数和给定的放大系数  $K$  值,计算(15)式;
- 6) getsolve, 求根轨迹多项式;
- 7) getloci, 得到根轨迹图形实体;
- 8) getbpoints, getxpoints, 求根轨迹在实轴上的分离点;
- 9) getopoints, getcpoints, 求开环零极点和闭环零极点;
- 10) getotext, getctext, 得到开环和闭环零极点的图形实体.

### 3.3 设计实例

给定开环传递函数

$$G(s) = \frac{s + 3}{s(s + 5)^2(s + 7)}, \quad (17)$$

由上节符号算法软件工具给出如下计算结果:

Real axes break points  $x_1 = -6.28903$ ;

Real axes break points  $x_2 = -5.0$ ;

Loci Algebraic Equation is

$$y_1 = -\sqrt{22 + 11s + s^2 - \sqrt{1009 + 1054s + 413s^2 + 68s^3 + 4s^4}},$$

$$y_2 = \sqrt{22 + 11s + s^2 - \sqrt{1009 + 1054s + 413s^2 + 68s^3 + 4s^4}},$$

$$y_3 = -\sqrt{22 + 11s + s^2 + \sqrt{1009 + 1054s + 413s^2 + 68s^3 + 4s^4}},$$

$$y_4 = \sqrt{22 + 11s + s^2 + \sqrt{1009 + 1054s + 413s^2 + 68s^3 + 4s^4}}.$$

根轨迹如图 4 所示.

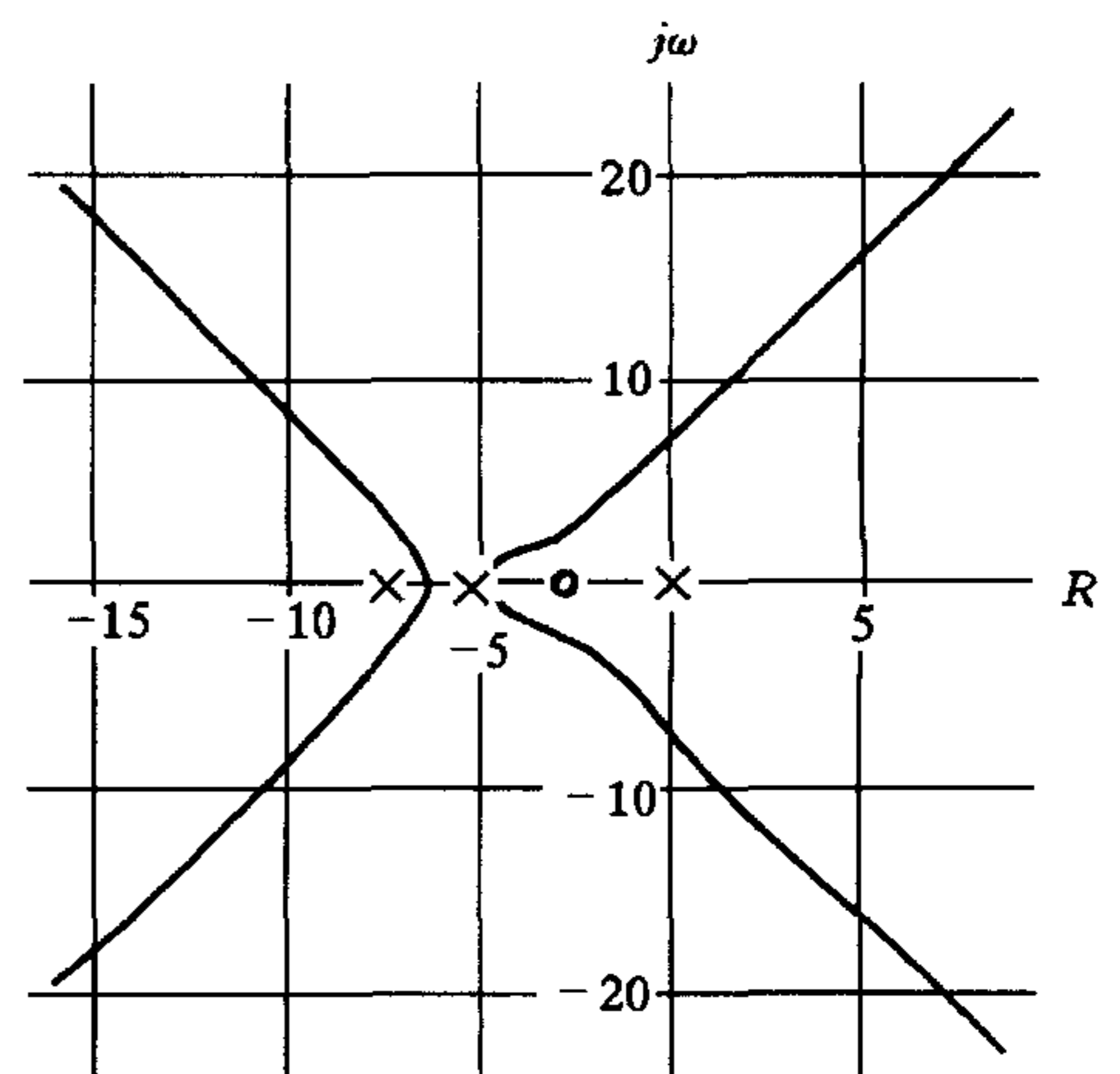


图 4 (17)式的根轨迹图输出



## 4 小结

本文通过对控制系统计算机辅助设计的计算机代数方法研究,设计和开发了具有符号计算和数值分析能力的 Symbol CAD 软件工具. 它面向对象的方法和设计结构,为该软件工具的进一步发展和完善打下了良好的基础,同时也为计算机代数方法在控制系统计算机辅助设计中的应用开辟了一条新路.

### 参 考 文 献

- 1 黄琳,秦化淑,郑应平,郑大钟. 复杂控制系统理论:构想与前景. 自动化学报,1993,19(2):129—136
- 2 陈桂,张征宇. 计算机代数——科学计算的一场革命. 计算机用户,1989,(11):23—25
- 3 Symbolics Inc. MACSYMA Reference Manual Version 10. Cambridge, MA: MIT and Symbolics Inc. 1983
- 4 Rand Corporation 87. REDUCE User's Manual Version 3. 3. Publication CP78 The Rand Corp., Santa Monica, CA: 1987
- 5 Waterloo Maple Software. MAPLE V for DOS, Getting Started. Fifth Edition, 1985
- 6 The MuMath——83tm Symbolic Mathematics System Reference Manual. Honolulu, USA: Softwarehouse Inc., 1983
- 7 Wolfram Stephen. Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer. New York: Addison-Wesley, 1988
- 8 Steiglitz Kenneth. An analytical approach to Root Loci. *IRE Transactions on Automatic Control*, 1961, 6(9): 326—333
- 9 Krishnan Venkaterama. Semi-analytic approach to root loci. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1966, 11(1): 102—108
- 10 Wojcik K Charles. Analytical representation of the root-locus. *Journal of Basic Engineering*, 1964, (3): 37—43
- 11 Pan C T, Chao K S. A computer-aided root-locus method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, 23(5): 856—860
- 12 Bien Zeungnam, Lee Jietae. A note on a computer-aided root-locus method. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, 31(3): 246—247

## A COMPUTER ALGEBRA TOOL FOR CONTROL SYSTEM——SYMBOL CAD

YANG GUANGYU    ZHENG YINGPING

(Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080)

**Abstract** In this paper, we deal with computer algebra method for computer aided design of control system, and briefly introduce the design method and structure of the computer algebra software tool——SymbolCAD for control system. Based on object-oriented scheme and graphical windows environment, SymbolCAD can do symbolic and numerical calculations, and algorithm programming. It can also be expanded easily.

**Key words** Computer algebra, control system, computer aided design of control system, object-oriented software tool

**杨光宇** 1989 年在北京理工大学自动控制系获硕士学位, 1996 年在中国科学院自动化研究所获博士学位. 主要研究领域为计算机仿真、控制系统 CAD、DEDS 仿真、计算机代数、计算机图形学和虚拟现实等.

**郑应平** 简介见本刊第 18 卷第 2 期.