

# 具有状态约束的最大值原理 在水库调度中的应用

方强 王先甲

(武汉大学系统工程研究所 武汉 430072)  
(E-mail: ffaqq@263.net)

**摘要** 提出采用最优控制理论来描述水库调度中的连续变化特性,建立了水库调度的最优控制模型.利用具有状态约束的最大值原理对模型进行求解,给出了水库调度最优控制策略需要满足的必要条件,分析了不同条件和环境下水库调度最优控制策略的特性和具体表示形式.某具体水库调度问题的数值算例验证了上述方法的有效性.

**关键词** 最大值原理, 最优控制, 水库调度

**中图分类号** TP273.1

## Application of the Maximum Principle with State Constraints to Reservoir Operation

FANG Qiang WANG Xian-Jia

(Institute of Systems Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072)

(E-mail: ffaqq@263.net)

**Abstract** Optimal control theory is proposed to describe the characteristic of continuous variation in reservoir operation. After constructing the optimal control model of reservoir operation, this paper solves it using the maximum principle with state constraints. A necessary condition of optimal control strategy is presented and the characteristic and expression of optimal control strategy are analyzed under different conditions. A numerical example of a certain reservoir operation indicates validity of the method.

**Key words** Maximum principle, optimal control, reservoir operation

### 1 引言

水资源工程系统为实现一定目标对自然系统在可能范围内实施人工控制与调节(即决策),在这个领域中发生重要进步的一个显著标志是在复杂水资源系统的规划、设计和管理中采用和发展了最优化技术.复杂的水资源工程系统的实现本质上是最优决策问题,为解决这个问题,首先需要建立描述这一问题本质的数学模型,包括目标函数与约束条件.目标函数为决策变量与参数的函数,约束条件由决策变量与参数的函数的等式或不等式构成,这些函数形式决定了决策问题的结构.一旦目标和约束被确定,剩下的问题就是寻找求解技术,并将求解结果提交调度决策者,为其作出最后调度决策提供科学的决策支持.

从 Yeh<sup>[1]</sup> 对水库调度优化的回顾中可以看出,不存在通用的算法,采用什么方法,取决于所考虑的水库系统的特征、可获取的数据、目标和约束条件.目前,国内外广泛采用的方法可分为如下三类:

1) 动态规划. 此类方法经过多年的发展已较为成熟, 在实际工程应用中往往根据问题的特点, 在原始方法的基础上进行相应的改进, 以期得到更优的结果<sup>[2,3]</sup>.

2) 非线性规划. 此领域的研究主要集中在将新的理论, 如神经网络理论, 遗传算法, 模糊集理论, 辨识理论等, 引入水库调度, 从而使水库调度的优化结果得到改善. 目前这个领域的研究活动最为活跃, 结果也最为丰富<sup>[4~9]</sup>.

3) 大系统多目标规划. 此类方法应用多目标和大系统分解协调方法对水库优化调度问题进行分析和研究<sup>[10,11]</sup>.

水库调度过程从本质上说就是在一个时间段内对水库放水过程的控制, 它实际上是一个动态过程问题. 在这个动态过程中, 水库来水过程是动态变化的, 描述水库状态的水位或蓄水量是动态变化的, 水库调度就是要根据这些客观动态变化按水库调度的目标确定在整个调度过程中水库放水全过程的决策或控制策略.

动态规划方法是 Bellman<sup>[12]</sup> 为解决多阶段决策问题提出的, 是一种适应于多阶段优化决策过程的方法, 在水库调度的优化中得到了广泛的应用. 应该说, 从实际应用的角度来看, 动态规划是成功的, 但从理论分析的角度来说, 它是不成功的.

首先, 动态规划方法将实际的连续过程离散成了一个多阶段过程. 这虽然使得问题处理起来较为方便, 但同时也使得它从理论上不能描述水库调度中来水变化过程、水位变化过程和放水过程的全部信息. 因此, 实际上它是一种离散地描述水库调度全过程的近似动态优化方法, 这决定了它只适应于实际应用中的近似计算, 而不适于确定的理论分析.

其次, 动态规划问题的求解大部分采用的是数值算法. 从控制的角度来说, 求出来的解是开环解, 也就是说解只与离散时间有关, 这对实际应用来说可能是方便的, 但对于理论分析来说就很不方便了.

造成这些问题的主要原因是: 动态规划只是一种适应于多阶段离散动态过程的近似描述方法, 而不能精确描述连续动态变化过程的特性. 本质上, 水库调度是一个追求某个作为放水控制(决策)过程的函数(这个函数常称为目标函数)最优化的最优控制问题. 由于放水控制过程作为控制决策量是时间的函数, 因此水库调度追求的目标实际上是一个在由水库调度中各种约束条件决定的放水控制函数类上的泛函. 虽然这种泛函描述形式对水库调度是精确的, 但由于对此进行理论分析的困难性和实际中只要求有数值解就可以解决实际问题的惯性思考, 很少有人从这个精确描述水库调度问题的框架研究水库优化调度问题. Massé<sup>[13]</sup> 曾在 1946 年讨论了单水库水力发电的最优控制. 他通过经济学推理和利用变分法的广义形式进行严格的数学推导, 得到了自己的结果. Morel-Seytoux<sup>[14]</sup> 对 Massé 的方法进行了简单推广, 得到了一些更一般的结果. 虽然 Massé 的工作也是在连续时间的框架下进行的, 但由于注重经济学解释, Massé 并没有将水库调度问题描述成标准的最优控制问题, 而只是将其描述成具有积分约束的下泄流量的泛函问题. 同时, 由于采用变分法来求解模型, Massé 并未考虑对于下泄流量本身(设备能力)的约束.

从本质上说, 状态由微分方程描述的泛函极值问题更适应于用最大值原理处理和研究. 因此, 最大值原理成为分析水库调度最优控制问题的最佳工具. 本文提出了用最优控制理论描述水库调度问题和用最大值原理分析最优放水控制策略的特性和表示方式. 据我们查阅文献所知, 目前有关这种应用的文献很少, 而且绝大部分是利用离散的最大值原理来求解, 这与我们精确研究水库调度的连续控制过程的特性的初衷相背离.

## 2 水库调度最优控制模型

利用最优控制理论, 并结合水库调度过程自身的动态特性, 本文提出了以下的水库调度最优控制模型.

$$\max_{u \in A_{[0, \tau]}} \left\{ J = \int_0^T N(V, u, t) dt \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } & dV/dt = Q(t) - u(t), \quad V(0) = V_0 \\ & 0 < \underline{V} \leq V(t) \leq \bar{V} \\ & t \in [0, T] \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $A_{[0,T]} = \{u(t) | 0 < \underline{u} \leq u(t) \leq \bar{u}, t \in [0, T]\}$ ,  $V$  为水库蓄水量 ( $\text{m}^3$ ),  $\bar{V}$  为防洪限制水库蓄水的最高值, 这里设为常量.  $\underline{V}$  为满足灌溉、旅游、供水、养殖及野生动物保护要求水库必须维持的最低蓄水量, 这里设为常量.  $t$  为时间 (s),  $Q(t)$  为水库入流 ( $\text{m}^3/\text{s}$ ), 这里假定来水过程已知, 且为常量.  $u$  为水库下泄流量 ( $\text{m}^3/\text{s}$ ),  $\underline{u}$  为满足下游航运要求, 水库下泄的最小流量, 这里设为常量.  $\bar{u}$  为水轮机最大过水流量, 这里设为常量.  $N(V, u, t) = \eta \rho g (Z_u(V) - Z_d) = cu(Z_u(V) - Z_d)$ ,  $N$  为发电出力 (KW),  $\rho$  为水的密度 ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ),  $g$  为重力加速度 ( $\text{m}/\text{s}^2$ ),  $\eta$  为发电效率及单位转换,  $c$  为发电常数,  $Z_u(V)$  为上游水位与水库蓄水量的函数关系, 可由水位库容曲线求得, 设为已知.  $J$  为总发电量 (KWh),  $T$  为固定终端时间 (s). 同时假设  $0 < \underline{u} \leq Q \leq \bar{u}$ ,  $\underline{V} < V_0 < \bar{V}$ . 可以看到, 模型 (1) 为具有状态约束的最优控制问题. 因此, 水库调度问题可以表述为: 寻求一个容许控制  $u(t) \in A_{[0,T]}$ , 使得系统在该控制作用下从初态  $V(0) = V_0$  出发, 且满足状态约束, 整个过程在固定终端时间  $T$  结束, 且使性能指标  $J$  达到最大.

### 3 水库调度最优放水过程的特性与表示

在上节中已经提到, 水库调度的最优控制模型属于具有状态约束的最优控制问题. 对于此类问题, 本文采用文献 [15] 中的具有状态约束的最大值原理进行求解. 由上节中的水库调度最优控制模型和文献 [15] 中的定理 4.1, 可以得到:

$$\begin{aligned} g(V, u, t) &= \begin{bmatrix} u(t) - \underline{u} \\ \bar{u} - u(t) \end{bmatrix} \geq 0, \quad h(V, t) = \begin{bmatrix} V(t) - \underline{V} \\ \bar{V} - V(t) \end{bmatrix} \geq 0 \\ H(V, u, \lambda, t) &= N(V, u, t) + \lambda[Q - u(t)] = [c(Z_u(V) - Z_d) - \lambda] \cdot u(t) + \lambda Q \\ L(V, u, \lambda, \mu, \nu, t) &= H(V, u, \lambda, t) + \mu_1[u(t) - \underline{u}] + \mu_2[\bar{u} - u(t)] + \nu_1[V(t) - \underline{V}] + \nu_2[\bar{V} - V(t)] \\ u^*(t) &= \arg \max_{u \in A_{[0,T]}} H(V^*(t), u, \lambda, t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$L_u^*(t) = H_u^*(t) + \mu g_u^*(t) = c(Z_u(V) - Z_d) - \lambda + \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad (3)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -L_V^*(t) = -c \cdot u \cdot dZ_u(V)/dV - \nu_1 + \nu_2 \quad (4)$$

$$\mu_1(t), \mu_2(t) \geq 0, \quad \mu_1[u(t) - \underline{u}] + \mu_2[\bar{u} - u(t)] = 0 \quad (5)$$

$$\nu_1(t), \nu_2(t) \geq 0, \quad \nu_1[V(t) - \underline{V}] + \nu_2[\bar{V} - V(t)] = 0 \quad (6)$$

$$dH^*[t]/dt = dL^*[t]/dt = L_t^*[t] \triangleq \partial L^*[t]/\partial t \quad (7)$$

$$\lambda(T^-) = \gamma \cdot h_V^*[T] = \gamma_1 \cdot h_{1V}^*[T] + \gamma_2 \cdot h_{2V}^*[T] = \gamma_1 - \gamma_2 \quad (8)$$

$$\gamma_1, \gamma_2 \geq 0, \quad \gamma_1[V(T) - \underline{V}] + \gamma_2[\bar{V} - V(T)] = 0 \quad (9)$$

对于边界区间中任意时间  $\tau$  或任意接触时间  $\tau$ ,  $\lambda$  可能存在由下列跳跃条件给出的不连续性:

$$\lambda(\tau^-) = \lambda(\tau^+) + \eta(\tau) \cdot h_V^*[\tau] \quad (10)$$

$$H^*[\tau^-] = H^*[\tau^+] - \eta(\tau) \cdot h_t^*[\tau] \quad (11)$$

$$\eta(\tau) \geq 0, \quad \eta(\tau) \cdot h^*[\tau] = 0 \quad (12)$$

则由 (2) 有

$$u^*(t) = \begin{cases} \bar{u}, & c(Z_u(V) - Z_d) - \lambda > 0 \\ \text{undefined}, & c(Z_u(V) - Z_d) - \lambda = 0 \\ \underline{u}, & c(Z_u(V) - Z_d) - \lambda < 0 \end{cases} \quad (13)$$

为了能求出解析解的具体形式, 在这里设  $Z_u(V) = aV + b (a > 0)$ , 则由式 (3)(4) 有

$$\lambda = \mu_1 - \mu_2 + c(Z_u(V) - Z_d) \quad (14)$$

$$\dot{\lambda} = -acu(t) - \nu_1 + \nu_2 \quad (15)$$

由式 (7), 同时这里的  $N, dV/dt, \mathbf{g}, \mathbf{h}$  均非显式的依赖于  $t$ , 故  $H^*[t]$  为常量, 即

$$H^*[t] = \text{const} \quad t \in [0, T] \quad (16)$$

从式 (13) 可以看到, 要求解  $u^*(t)$  就要对表达式  $c[Z_u(V) - Z_d] - \lambda$  的符号进行判断, 因此设

$$K(t) = c(Z_u(V) - Z_d) - \lambda(t) = c[aV(t) + b - Z_d] - \lambda(t) = \mu_2(t) - \mu_1(t) \quad (17)$$

将其对时间求导, 可得

$$\dot{K}(t) = ac\dot{V} - \dot{\lambda} = ac[Q - u(t)] + acu(t) + \nu_1 - \nu_2 = acQ + \nu_1 - \nu_2 \quad (18)$$

由于

$$K(0) = c(aV_0 + b - Z_d) - \lambda(0) = \mu_2(0) - \mu_1(0) \quad (19)$$

$K(0)$  的符号无法确定, 故对其在 3.1 和 3.2 中分两种情况进行讨论. 鉴于篇幅的原因, 讨论过程略去, 得到的结果以命题的形式给出.

### 3.1 $K(0) < 0$

此时由式 (13) 有  $u^*(0) = \underline{u}$ , 由式 (5) 知  $\mu_1(0) = 0, \mu_2(0) = 0$ . 由于假设  $\underline{V} < V_0 < \bar{V}$ , 故由式 (6) 有  $v_1(0) = v_2(0) = 0$ , 则  $\dot{K} = acQ > 0, \dot{\lambda} = -ac\underline{u} < 0$ . 此后一段时间内,  $K(t) < 0, u^*(t) = \underline{u}, \mu_1(t) = 0, \mu_2(t) = 0$ . 由  $dV/dt = Q - \underline{u}, V(0) = V_0$  得到  $V(t) = (Q - \underline{u})t + V_0$ , 在  $t = t_{\bar{V}} = (\bar{V} - V_0)/(Q - \underline{u})$  时,  $V(t) = \bar{V}$ . 因此在  $t < t_{\bar{V}}$  时,  $\underline{V} < V(t) < \bar{V}$ , 由式 (6) 有  $v_1(t) = v_2(t) = 0, \dot{K}(t) = acQ > 0, \dot{\lambda}(t) = -ac\underline{u}$ , 则  $\lambda(t) = -ac\underline{u}t + c_{\lambda 1}, K(t) = c(aQt + aV_0 + b - Z_d) - c_{\lambda 1}$ . 当  $t = t_K = (c_{\lambda 1}/c - aV_0 + b - Z_d)/aQ$  时,  $K(t) = 0$ . 在时间  $t_{\bar{V}}$  和  $t_K$ , 前述的状态都不能继续保持, 而且  $t_{\bar{V}}$  和  $t_K$  孰前孰后对于变化后的状态具有决定性的影响, 因此我们对它们的先后关系进行讨论, 结果如命题 1 和 2.

**命题 1.** 若  $K(0) < 0, t_{\bar{V}} \leq t_K < T$  且  $\underline{V} < V(T) < \bar{V}$ , 则最优控制与最优轨线分别为:

$$u^*(t) = \begin{cases} \underline{u}, & [0, t_{\bar{V}}) \\ Q, & [t_{\bar{V}}, t_c) \\ \bar{u}, & [t_c, T] \end{cases}, \quad V^*(t) = \begin{cases} (Q - \underline{u})t + V_0, & [0, t_{\bar{V}}) \\ \bar{V}, & [t_{\bar{V}}, t_c) \\ (Q - \bar{u})[t - T + (a\bar{V} + b - Z_d)/a\bar{u}] + \bar{V}, & [t_c, T] \end{cases}$$

其中  $t_{\bar{V}} = (\bar{V} - V_0)/(Q - \underline{u}), t_c = T - (a\bar{V} + b - Z_d)/a\bar{u}$ .

若  $K(0) < 0, t_{\bar{V}} \leq t_K < T$  且  $V(T) = \underline{V}$ , 则最优控制与最优轨线分别为:

$$u^*(t) = \begin{cases} \underline{u}, & [0, t_{\bar{V}}) \\ Q, & [t_{\bar{V}}, t_c) \\ \bar{u}, & [t_c, T] \end{cases}, \quad V^*(t) = \begin{cases} (Q - \underline{u})t + V_0, & [0, t_{\bar{V}}) \\ \bar{V}, & [t_{\bar{V}}, t_c) \\ (Q - \bar{u})(t - T) + \underline{V}, & [t_c, T] \end{cases}$$

其中  $t_{\bar{V}} = (\bar{V} - V_0)/(Q - \underline{u}), t_c = T + (\bar{V} - \underline{V})/(Q - \bar{u})$ .

对于第一种情形, 由于  $t_c \geq t_{\bar{V}}$ , 故此时要求:

$$a\bar{u}[T - (\bar{V} - V_0)/(Q - \underline{u})] \geq a\bar{V} + b - Z_d \quad (20)$$

即在保持下泄流量为最小使得水库库容从初始库容达到库容上限后的剩余时间内, 保持下泄流量为最大所得到的放水量造成的上游水位的变化量大于等于最高上游水位与下游水位之差.

由于  $V(T) = \bar{V} + (Q - \bar{u})(a\bar{V} + b - Z_d)/a\bar{u}$ , 显然  $V(T) < \bar{V}$ , 但若此种情况成立还需  $V(T) > \underline{V}$ , 即

$$a\bar{u}(\bar{V} - \underline{V})/(\bar{u} - Q) > a\bar{V} + b - Z_d \quad (21)$$

也就是要求在保持下泄流量为最大使得水库库容从上限达到下限所需时间内, 保持下泄流量为最大所得到的放水量造成的上游水位的变化量大于等于最高上游水位与下游水位之差.

对于第二种情形, 由于  $t_c \geq t_{\bar{V}}$ , 故此时对  $T$  要求:

$$T \geq (\bar{V} - V_0)/(Q - \underline{u}) - (\bar{V} - \underline{V})/(Q - \bar{u}) \quad (22)$$

即  $T$  要大于保持下泄流量为最小使得水库库容从初始库容达到库容上限所需时间与保持下泄流量为最大使得水库库容从上限达到下限所需时间之和.

此时可以推出  $\lambda(T) = c(a\bar{V} + b - Z_d) + ac\bar{u}(\bar{V} - \underline{V})/(Q - \bar{u})$ . 若要使此种情况成立, 还要求  $\lambda(T) \geq 0$ , 即

$$a\bar{u} \cdot (\bar{V} - \underline{V})/(\bar{u} - Q) \leq a\bar{V} + b - Z_d \quad (23)$$

即在保持下泄流量为最大使得水库库容从上限达到下限所需时间内, 保持下泄流量为最大所得到的放水量造成的上游水位的变化量大于等于最高上游水位与下游水位之差.

**命题 2.** 若  $K(0) < 0$ ,  $t_K < t_{\bar{V}} < T$ , 则最优控制与最优轨线分别为:

$$u^*(t) = \begin{cases} \underline{u}, & [0, t_K) \\ \bar{u}, & [t_K, T] \end{cases}, \quad V^*(t) = \begin{cases} (Q - \underline{u})t + V_0, & [0, t_K) \\ (Q - \bar{u})t + c_V, & [t_K, T] \end{cases}$$

其中  $t_K = (c_{\lambda 1}/c - aV_0 - b + Z_d)/aQ$ ,  $c_{\lambda 1} = [acQ\bar{u}T + c(aV_0 + b - Z_d)(\bar{u} - \underline{u})]/(\bar{u} - \underline{u} + Q)$ ,  $c_V = (\bar{u} - \underline{u})(c_{\lambda 1}/c - aV_0 - b + Z_d)/aQ + V_0$ .

此时由  $K(0) < 0$ ,  $t_K < t_{\bar{V}}$ ,  $T < t_{\underline{V}}$  可以分别得到式:

$$a\bar{u}T > aV_0 + b - Z_d \quad (24)$$

$$a\bar{u} \cdot [T - (\bar{V} - V_0)/(Q - \underline{u})] < a\bar{V} + b - Z_d \quad (25)$$

$$T - (\underline{V} - V_0)/(Q - \underline{u}) < (\bar{u} - \underline{u})(a\underline{V} + b - Z_d)/aQ(Q - \bar{u}) \quad (26)$$

其中式 (24) 要求在整个周期内保持下泄流量为最大所得到的放水量造成的上游水位的变化量大于初始时刻上游水位与下游水位之差. 而式 (25) 则要求在保持下泄流量为最小使得水库库容从初始库容达到库容上限后的剩余时间内, 保持下泄流量为最大所得到的放水量造成的上游水位的变化量小于最高上游水位与下游水位之差.

**注.** 对于  $T \leq t_{\bar{V}}$  或  $T \leq t_K$  的情况, 分析与下述的 3.2 中的情况类似, 这里不再详述.

### 3.2 $K(0) \geq 0$

**命题 3.** 若  $K(0) \geq 0$ , 则最优控制与最优轨线分别为:  $u^*(t) = \bar{u}$ ,  $V^*(t) = (Q - \bar{u})t + V_0$ ,  $t \in [0, T]$ .

此时由  $K(0) \geq 0$ ,  $T < t_{\underline{V}}$  有:

$$a\bar{u}T \leq aV_0 + b - Z_d \quad (27)$$

$$T < (V_0 - \underline{V})/(\bar{u} - Q) \quad (28)$$

式 (27) 要求在整个周期内保持下泄流量为最大所得到的放水量造成的上游水位的变化量小于等于初始时刻上游水位与下游水位之差. 式 (28) 要求在整个周期内保持下泄流量为最大所得到的终端库容大于下限值.

通过以上的模型求解结果可以看到: 1) 模型的参数对于模型的求解结果有很大的影响, 不同的参数对应着不同的最优控制结构, 不同的动态过程; 2) 最优控制的结构大体上可以分为两类: 一类是典型的 bang-bang 控制, 在轨线上不存在边界区间, 即状态约束为紧的区间; 另一类是奇异控制, 在轨线上存在边界区间.

## 4 算例

针对某大型水电站水库, 其相应参数分别为:  $c = 8.5$ ,  $a = 2.3547 \times 10^{-8}$ ,  $b = 540.9074$ ,  $Z_d = 503.6\text{m}$ , 正常蓄水位为 588m, 死水位为 558m,  $Q = 322\text{m}^3/\text{s}$ ,  $\bar{u} = 956\text{m}^3/\text{s}$ ,  $\underline{u} = 213\text{m}^3/\text{s}$ , 设规划周期为  $T = 1800\text{h}$ , 起调水位为 584m.

### 4.1 运用极值原理求解的结果

可以验证, 本算例中的参数符合命题 1 的第二种情形中的 (22) 和 (23), 故可求得:

$$u^*(t) = \begin{cases} \underline{u}, & [0, t_{\bar{V}}) \\ Q, & [t_{\bar{V}}, t_c) \\ \bar{u}, & [t_c, T] \end{cases}, \quad V^*(t) = \begin{cases} (Q - \underline{u})t + V_0, & [0, t_{\bar{V}}) \\ \bar{V}, & [t_{\bar{V}}, t_c) \\ (Q - \bar{u})(t - T) + \underline{V}, & [t_c, T] \end{cases}$$

其中  $t_{\bar{V}} = 1.5585 \times 10^6\text{s} = 432.9\text{h}$ ,  $t_c = 4.4705 \times 10^6\text{s} = 1241.8\text{h}$ . 而最优目标函数  $J^* = 5.6624 \times 10^6\text{KWh}$ .

### 4.2 运用动态规划求解的结果

对于水位  $Z_u$  的不同量化增量  $\Delta Z_u$  得到相应的计算结果和图示如下, 其中  $t_1, t_2$  为最优控制的两次切换时间, 也就是  $t_{\bar{V}}$  与  $t_c$ , 鉴于篇幅原因仅给出了量化增量分别为  $\Delta Z_u = 1\text{m}$  和  $\Delta Z_u = 0.01\text{m}$  两种情形下的最优控制如图 1 所示.

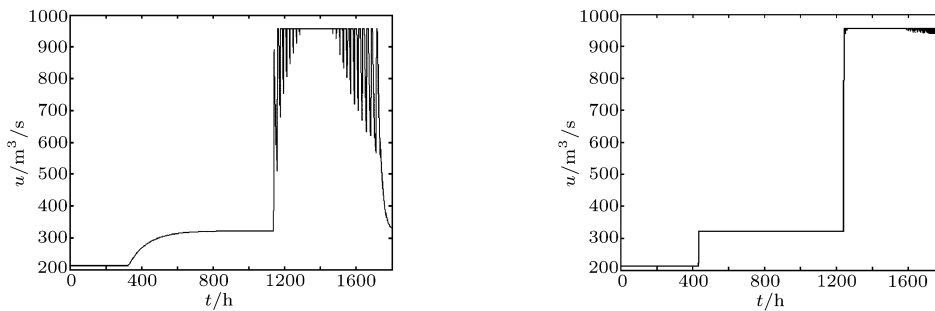


图 1 最优控制

Fig. 1 Optimal control

- 1)  $\Delta Z_u = 1\text{m}$ ,  $t_1 = 325\text{h}$ ,  $t_2 = 1137\text{h}$ ,  $J = 5.5833 \times 10^8\text{KWh}$ ;
- 2)  $\Delta Z_u = 0.1\text{m}$ ,  $t_1 = 423\text{h}$ ,  $t_2 = 1218\text{h}$ ,  $J = 5.6433 \times 10^8\text{KWh}$ ;
- 3)  $\Delta Z_u = 0.05\text{m}$ ,  $t_1 = 428\text{h}$ ,  $t_2 = 1235\text{h}$ ,  $J = 5.6575 \times 10^8\text{KWh}$ ;
- 4)  $\Delta Z_u = 0.01\text{m}$ ,  $t_1 = 432\text{h}$ ,  $t_2 = 1239\text{h}$ ,  $J = 5.6606 \times 10^8\text{KWh}$ .

由于动态规划是用一个离散的多阶段决策问题去近似一个连续时间决策问题, 在计算的过程中又需要将状态变量和决策变量离散化, 因此时间量化增量  $\Delta t$ 、状态变量量化增量  $\Delta Z_u$  和决策变量量化增量  $\Delta u$  对于求解结果的精确性存在至关重要的影响, 在这里由

于  $\Delta t$  与  $\Delta u$  的取值较为合适, 故我们仅对  $\Delta Z_u$  的取值变化进行考察. 从上面的结果可以看到, 随着  $\Delta Z_u$  的取值越来越小, 即离散的越来越精细, 动态规划得到的结果越来越逼近用极值原理求得的结果, 即近似解越来越逼近精确解, 从而证明了本文所提出的方法的正确性和有效性.

## 5 结论

本文给出了具有状态约束的最大值原理在水库调度问题中的一种应用. 在利用最优控制理论对水库调度问题进行描述, 从而得到水库调度的最优控制模型之后, 作者运用具有状态约束的最大值原理对最优控制的特性与表示形式进行了分析, 得到了具体的结果. 针对一个具体的算例, 本文将动态规划的结果与运用文中提出的方法得到的结果进行比较, 验证了方法的正确性和有效性. 我们下一步需要进行的工作包括: 1) 考虑多目标模型的求解问题; 2) 考虑模型中的水库入流为非常量的情形.

## References

- 1 Yeh W W G. Reservoir management and operations models: a state-of-the-art review. *Water Resources Research*, 1985, **21**(12): 1797~1818
- 2 Mei Y D. Dynamic programming model without Markov property of cascade reservoirs operation and its application. *Advances in Water Science*, 2000, **11**(2): 194~198
- 3 Mousavi S J, Karamouz M. Computational improvement for dynamic programming models by diagnosing infeasible storage combinations. *Advances in Water Resources*, 2003, **26**(8): 851~859
- 4 Miao Y P, Ji C M. Improving neural network algorithm for establishing reservoir operation function. *Engineering Journal of Wuhan University*, 2003, **36**(1): 42~45
- 5 Chandramouli V, Raman H. Multireservoir modeling with dynamic programming and neural networks. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 2001, **127**(2): 89~98
- 6 You J J, Ji C M, Fu X. New method for solving multi-objective problem based on genetic algorithm. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2003, **34**(7): 64~69
- 7 Tilmant A, Faouzi E H, Vanclooster M. Optimal operation of multipurpose reservoirs using flexible stochastic dynamic programming. *Applied Soft Computing*, 2002, **2**(1): 61~74
- 8 Liu B, Odanaka T. Dynamic fuzzy criterion model for reservoir operations and a case study. *Computers and Mathematics with Applications*, 1999, **37**(11): 65~75
- 9 Zhou X Y, Zhang Y C, Ma Y W. The identifying type optimal dispatching method. *Journal of Hydroelectric Engineering*, 2000, **69**(2): 74~86
- 10 Chen Y B, Hu J Q. Study on integrated operation of cascade hydropower stations. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2004, **35**(3): 47~52
- 11 Yang K, Liu Y B. System decomposition-coordination macro-decision method for reservoirs based on multi-objective analysis. *Advances in Water Science*, 2001, **12**(2): 232~236
- 12 Bellman R E. *Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press, 1957
- 13 Massé P. *Reserves and regulation of the future in the economic life*. Paris: Hermann, 1946
- 14 Morel-Seytoux H J. Optimal deterministic reservoir operations in continuous time. *Journal of Water Resource Planning and Management*, 1999, **125**(3): 126~134
- 15 Hartl R F, Sethi S P, Vickson R G. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, 1995, **37**(2): 181~218

方 强 博士研究生. 主要研究方向为最优控制理论的应用.

(FANG Qiang Ph.D. candidate. His research interest includes application of optimal control theory.)

王先甲 教授, 博士生导师. 主要研究方向为决策分析与投资决策管理, 水资源系统工程与水电市场管理.

(WANG Xian-Jia Professor. His research interests include decision analysis and investment decision management, water resource system engineering, and water and electricity market management.)