

# 具有未知时滞的线性连续系统的辨识

陶永林 倪祖彭 章文斌

(上海第二工业大学电子电气工程系)

## 摘 要

本文给出了一种频域方法,它能用来辨识具有未知时滞的连续过程。

**关键词:** 线性连续系统辨识,未知时滞,频域方法。

## 一、引 言

文献[1]对连续系统的辨识方法作了综述。它认为,未知时滞存在时的辨识是一个困难的问题。本文的目的是对这一问题给出一个解决办法。首先,在对象上加一个(周期适当的)非正弦周期信号。然后,通过对它的输入和(稳态)输出信号分别进行富氏分析,可以得到对象频率特性曲线上若干个数据点<sup>[2]</sup>,以下认为这些点的数据是已知的。

## 二、频域辨识方法

设对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} e^{-\tau s}. \quad (1)$$

其中  $\tau$  为对象的滞后时间。

$$A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0, \quad (2)$$

$$B(s) = b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0. \quad (3)$$

$n$  为对象的阶次,假定是已知的。

所谓参数估计问题,即已知对象频率特性的数据  $\omega_k$ ,  $|G(j\omega_k)|$ ,  $\text{Arg } G(j\omega_k)$ ,  $k=1,2,\dots,m$ , 如何来估计未知参数  $a_k, b_k (k=0,1,\dots,n-1)$  以及  $\tau$ 。这里应注意,相位  $\text{Arg } G(j\omega_k) \in (-\infty, \infty)$ 。

记

$$F(s) = G(s)G(-s), \quad (4)$$

$$C(s) = A(s)A(-s), \quad (5)$$

$$D(s) = B(s)B(-s). \quad (6)$$

那末,由(1)式—(6)式可得

$$F(s) = \frac{D(s)}{C(s)}. \quad (7)$$

而且,  $C(s)$  和  $D(s)$  具有如下形式:

$$C(s) = (-1)^n [s^{2n} + C_{n-1}s^{2(n-1)} + \dots + C_1s^2 + C_0], \quad (8)$$

$$D(s) = (-1)^n [d_{n-1}s^{2(n-1)} + \dots + d_1s^2 + d_0]. \quad (9)$$

$F(s)$  的频率特性为

$$F(j\omega) = |G(j\omega)|^2 = \frac{D(j\omega)}{C(j\omega)}. \quad (10)$$

假定对于  $\omega = \omega_k, k = 1, 2, \dots, m, F(j\omega) = |G(j\omega)|^2$  已知,那末由(8)—(10)式可得

$$\mathbf{x}^T(\omega_k)\boldsymbol{\theta} = y(\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

其中

$$\mathbf{x}^T(\omega) = [F(j\omega), -\omega^2F(j\omega), \dots, (-1)^{n-1}\omega^{2(n-1)}F(j\omega), -1, \omega^2, \dots, (-1)^n\omega^{2(n-1)}], \quad (12)$$

$$y(\omega) = (-1)^{n-1}\omega^{2n}F(j\omega), \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\theta} = [c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, d_0, d_1, \dots, d_{n-1}]^T. \quad (14)$$

记

$$X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(\omega_1) \\ \mathbf{x}^T(\omega_2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(\omega_m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(\omega_1) \\ y(\omega_2) \\ \vdots \\ y(\omega_m) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

利用(15)式,联立方程组(11)可写成

$$X\boldsymbol{\theta} = \mathbf{y}. \quad (16)$$

记  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  为  $\boldsymbol{\theta}$  的最小二乘估计,则有

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{y}. \quad (17)$$

于是,得到了  $c_i, d_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$  的一组估计值  $\hat{c}_i, \hat{d}_i (i = 0, 1, \dots, n-1)$ .

设  $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$  和  $z_i (i = 1, 2, \dots, l)$  分别为对象的有限极点和零点,这里,  $0 \leq l \leq n-1$ . 将  $C(s)$  和  $D(s)$  写成因式分解形式,则有

$$C(s) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (s^2 - p_i^2), \quad (18)$$

$$D(s) = (-1)^l b_l^2 \prod_{i=1}^l (s^2 - z_i^2) \quad \text{或} \quad D(s) = b_0^2. \quad (19)$$

可见,  $C(s)$  和  $D(s)$  的根分别为  $\pm p_i (i = 1, 2, \dots, n)$  和  $\pm z_i (i = 1, 2, \dots, l)$ .

记

$$\hat{C}(s) = (-1)^n (s^{2n} + \hat{c}_{n-1}s^{2(n-1)} + \dots + \hat{c}_1s^2 + \hat{c}_0), \quad (20)$$

$$\hat{D}(s) = (-1)^l (\hat{d}_l s^{2l} + \dots + \hat{d}_1s^2 + \hat{d}_0). \quad (21)$$

通过多项式  $\hat{C}(s)$  和  $\hat{D}(s)$  的求根运算, 可以得  $\pm p_i$  和  $\pm z_i$  的估计值  $\pm \hat{p}_i$  和  $\pm \hat{z}_i$ . 因此, 在  $2^{n+l+1}$  种可能的选择中, 可以选取一组  $\hat{p}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 、 $\hat{z}_i (i = 1, 2, \dots, l)$  和  $\hat{b}_l$  来构造一个没有时滞的有理分式函数.

$$\hat{G}_0(s) = \frac{\hat{b}_l \prod_{i=1}^l (s - \hat{z}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - \hat{p}_i)} \quad \text{或} \quad \hat{G}_0(s) = \frac{\hat{b}_0}{\prod_{i=1}^n (s - \hat{p}_i)}. \quad (22)$$

其中, 非负整数  $l$  满足  $\hat{d}_l \neq 0$ , 但  $\hat{d}_j = 0 (j > l)$ .

$$\hat{b}_l = \pm \sqrt{|\hat{d}_l|}. \quad (23)$$

假定对象的相频特性  $\text{Arg } G(j\omega_k) (k = 1, 2, \dots, m)$  已知, 那末可以按下式来估计未知的滞后时间  $\tau$ :

$$\hat{\tau}(\omega_k) = [\text{Arg } \hat{G}_0(j\omega_k) - \text{Arg } G(j\omega_k)] / \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (24)$$

$$\hat{\tau} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \hat{\tau}(\omega_k). \quad (25)$$

从理论上讲, 如果所挑选的一组参数是正确的, 那末就有  $\hat{\tau}(\omega_k) = \hat{\tau} (k = 1, 2, \dots, m)$ , 但实际辨识时, 由于有计算误差、模型误差以及噪声,  $\hat{\tau}(\omega_k) (k = 1, 2, \dots, m)$  彼此之间不能严格相等. 因此, 不妨取一个判断准则, 例如是否满足  $J \triangleq \max_k |\hat{\tau}(\omega_k) - \hat{\tau}| \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  为一个很小的正数), 来判断挑选的一组参数是否选得正确.

一般先挑选具有非正实部的  $\hat{p}_i$  和具有负实部的  $\hat{z}_i$  以及正的  $\hat{b}_l$  来试算  $\hat{\tau}(\omega_k)$  和  $\hat{\tau}$ . 如果不行, 再考虑其他的可能性.

现在不妨假定对象的传递函数  $G(s)$  满足以下的条件:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^q G(s) = \text{正的常数}. \quad (26)$$

其中  $q$  为  $G(s)$  中积分环节的个数. 因此, 在选取  $\hat{p}_i$ 、 $\hat{z}_i$  和  $\hat{b}_l$  时, 首先应满足

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^q \hat{G}_0(s) = \text{正的常数}. \quad (27)$$

关于参数估计的有解条件, 以及关于在满足式(27)的选取  $\hat{G}_0(s)$  求  $\hat{\tau}$  的过程中, 是否有多组解的问题, 有如下的结果:

**定理.** 设对象传递函数  $G(s)$  满足条件:  $F(s) = D(s)/C(s)$  是既约的, 那末包括滞后时间  $\tau$  在内的参数估计问题有唯一解的充要条件是(辨识涉及的)频率数目  $m \geq 2n$ , 其中  $n$  为对象的阶次(证明略).

另外, 如果对象的阶次  $n$  未知, 那末可以证明, 当所取的模型阶次  $\bar{n} > n$  时, (17)式中的  $2\bar{n}$  阶方阵  $X^T X$  必为奇异阵. 根据这一点, 对象的阶次也能加以辨识.

### 三、计算例子

设对象传递函数  $G(s) = B(s)e^{-\tau s}/A(s)$  中,  $A(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$ ,  $B(s) = 2(s+5) = 2s + 10$ ;  $\tau = 1.2$ . 根据(5)式和(6)式,  $C(s) = s^4 - 5s^2 + 4$ ,

$D(s) = -4s^2 + 100$ . 辨识时,取  $\omega_1 = 0.5, \omega_2 = 3\omega_1; \omega_3 = 5\omega_1, \omega_4 = 7\omega_1$ . 在对象输入端叠加基频为  $\omega_1$  的适当幅度的方波,然后对输入和输出信号进行富氏分析,作为计算例子,对  $G(j\omega_k)$  进行通常的复数运算,得到  $|G(j\omega_k)|$  和  $\text{Arg}(j\omega_k)$  的数据如下表:

表 1 对象的幅频和相频特性数据

$k$	1	2	3	4
$\omega_k$	0.5	1.5	2.5	3.5
$ G(j\omega_k) $	4.3602482390	2.3164960277	1.2969524997	0.83187584203
$\text{Arg } G(j\omega_k)$	-1.2089576196	-3.1348380380	-4.6226977257	-5.9334209168

将上述数据代入(12)式、(13)式和(15)式中,可以算出  $X$  和  $y$ ,再算出  $X^T X$  和  $X^T y$ ,

$$X^T X = \begin{bmatrix} 393.55110502 & -178.70212327 & -26.752021755 & 35.817036848 \\ -178.70212327 & 350.75528640 & 35.817036848 & -197.90672874 \\ -26.752021755 & 35.817036848 & 4.0000000000 & -21.0000000000 \\ 35.817036848 & -197.90672874 & -21.0000000000 & 194.2500000000 \end{bmatrix},$$

$$X^T y = (-350.75528640 \quad 1904.7456746 \quad 197.90672874 \quad -1744.1982089)^T.$$

用高斯消去法解方程组(17)式,可求得  $\hat{\theta}$  如下:

$$\hat{\theta} = (\hat{c}_0, \hat{c}_1, \hat{d}_0, \hat{d}_1)^T = (3.9999999951 \quad -4.9999999916 \quad 99.999999864 \quad -4.0000000053)^T.$$

通过分别对  $\hat{C}(s) = s^2 + \hat{c}_1 s + \hat{c}_0$  和  $\hat{D}(s) = \hat{d}_1 s^2 + \hat{d}_0$  进行求根运算可得  $\hat{p}_1 = \pm 1.0000000006; \hat{p}_2 = \pm 1.9999999975; \hat{z}_1 = \pm -4.999999993$ . 同时,由(23)式算出  $\hat{b}_1 = \pm 2.0000000007$ . 选取具有负实部的  $\hat{p}_1, \hat{p}_2$  和  $\hat{z}_1$ , 此时满足(27)式的  $\hat{b}_1$  应为正. 由(22)式,  $\hat{G}_0(s) = \hat{b}_1(s - \hat{z}_1) / ((s - \hat{p}_1)(s - \hat{p}_2))$ . 利用(24)式和(25)式, 可以算出  $\hat{t}(\omega_1) = 1.2000000001, \hat{t}(\omega_2) = 1.2000000000, \hat{t}(\omega_3) = 1.2000000001, \hat{t}(\omega_4) = 1.2000000000$ ,

选取  $\hat{t} = 1.2000000001$ , 最后得到  $\hat{G}(s) = \frac{\hat{b}_1(s - \hat{z}_1)}{(s - \hat{p}_1)(s - \hat{p}_2)} e^{-\hat{t}s}$ .

### 参 考 文 献

- [1] Unbehauen, H. and Rao, G. P., Continuous-time Approaches to System Identification, *Preprints of the 8th IFAC/IFORS System on Identification and System Parameter Estimation*, 1(1988), 60—68.
- [2] Xiao Ning, Luo Ning-Su and Feng Chun-Bo., A Universal Design Method for PID Self-Tuning Regulator, *Preprints of the 8th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, 1(1988), 420—424.

## THE IDENTIFICATION OF CONTINUOUS-TIME LINEAR SYSTEMS WITH UNKNOWN TIME DELAYS

TAO YONGLIN   NI ZUPENG   ZHANG WENBIN

*(Shanghai Second Polytechnic University)*

### ABSTRACT

A frequency-domain method for the identification of continuous-time processes with unknown time delays is presented.

**Key words:** Identification of continuous-time linear system; unknown time delay; frequency-domain method.