第 21 卷 第 3 期 自 动 化 学 报 Vol. 21, No. 3
1995 年 5 月 ACTA AUTOMATICA SINICA May, 1995

研究简报

结构 (f, G_i) 不变分布的一个充要条件[1)]

韩正之 高 峰 张钟俊

(上海交通大学自动控制系 上海 200030)

关键词： 非线性分散系统，结构不变分布，结构相容。

考虑有干扰的具有两个控制站的非线性分散系统：

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m_1} g_{1i}(x)u_{1i} + \sum_{i=1}^{m_2} g_{2i}(x)u_{2i} + \sum_{j=1}^{q} p_j(x)\omega_j, \tag{1a}$$

$$y = h(x). \tag{1b}$$

其中 $x = [x_1^T x_2^T]^T$, $x_1 \in \boldsymbol{R}^{n_1}$ 和 $x_2 = \boldsymbol{R}^{n_2}$ 分别是第一子系统和第二子系统的状态； $u_1 = [u_{11} \cdots u_{1m_1}]^T$ 和 $u_2 = [u_{21} \cdots u_{2m_2}]^T$ 分别是两个子系统的输入； $\omega = [\omega_1 \cdots \omega_q]$ 是干扰. 记 $G_i = [g_{i1}, \cdots g_{im_i}], i = 1,2$. 控制律为

$$u_1 = \alpha_1(x_1) + Q_1(x_1)v_1, \qquad u_2 = \alpha_2(x_2) + Q_2(x_2)v_2. \tag{2}$$

其中 Q_1 和 Q_2 是可逆矩阵。

$\boldsymbol{R}^n (n = n_1 + n_2)$ 上的分布 Δ 称为是结构 $(f; G_1, G_2)$ 不变的，如果存在形为式(2)的分散控制律，使得

$$[f + G_1\alpha_1 + G_2\alpha_2, \Delta] \subset \Delta,$$

$$[(G_1Q_1)_j, \Delta] \subset \Delta, \ [(G_2Q_2)_j, \Delta] \subset \Delta, \ j = 1, \cdots, m_i, \ i = 1,2.$$

其中 $(G_iQ_i)_j$ 表示矩阵 G_iQ_i 的第 j 列.

在研究分散控制的时候，需要下列定义： Δ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一个非奇异分布，Δ 称为**结构可积**的，如果存在 $z_i = T_i(x_i), i = 1,2$, 使得

$$\Delta = \mathrm{sp}\left\{\frac{\partial}{\partial z_{11}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_{1s_1}}; \frac{\partial}{\partial z_{21}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_{2s_2}}\right\}. \tag{3}$$

进一步，$G_1(x)$ 和 $G_2(x)$ 称为是和 Δ **结构相容**的，如果存在非异矩阵 $Q_1(x_1)$ 和 $Q_2(x_2)$，使得 $G_i(x)Q_i(x_i) = [\tilde{g}_{i1}(x), \cdots, \tilde{g}_{ip_i}(x); \tilde{g}_{ip_i+1}(x), \cdots, \tilde{g}_{im_i}(x)], i = 1,2$, 且

$$\mathrm{sp}[\tilde{g}_{i1}(x), \cdots, \tilde{g}_{ip_i}(x)\} \cap \Delta = 0, \ 而 \ \mathrm{sp}\{\tilde{g}_{ip_i+1}(x), \cdots, \tilde{g}_{im_i}(x)\} \subset \Delta.$$

假定

$$\mathrm{sp}\{\tilde{g}_{11}(x), \cdots, \tilde{g}_{1p_1}(x)\} \cap \mathrm{sp}\{\tilde{g}_{21}(x), \cdots, \tilde{g}_{2p_2}(x)\} = 0. \tag{4}$$

如果 $G_1(x)$ 和 $G_2(x)$ 与 Δ 是**结构相容**的，且 $[g_{ij}, \Delta] \subset \Delta + \mathrm{sp}\{g_{i_1}, \cdots, g_{im_i}\}$，那么对任意的 $\lambda \in \Delta$，存在 $c_{ihj}^{(\lambda)}, h = 1, \cdots, p_i, j = 1, \cdots, m_i$ 和 $\delta_{ij}^{(\lambda)} \in \Delta$，使得

本文于 1993 年 3 月 20 日收到.

1）本项研究得到国家自然科学基金和国家教委资助优秀青年教师基金的资助.

$$[\tilde{g}_{ij}(x), \lambda(x)] = \sum_{h=1}^{p_i} c_{ihj}^{(\lambda)}(x)\tilde{g}_{ih}(x) + \delta_{ij}^{(\lambda)}(x). \tag{5}$$

类似地，由 $[f, \Delta] \subset \Delta + \mathrm{sp}\{g_{11}, \cdots g_{1m_1}\} + \mathrm{sp}\{g_{21}, \cdots, g_{2m_2}\}$，得到

$$[f(x), \lambda(x)] = \sum_{h=1}^{p_1} c_{1h0}^{(\lambda)}(x)\tilde{g}_{1h}(x) + \sum_{h=1}^{p_2} c_{2h0}^{(\lambda)}(x)\tilde{g}_{2h}(x) + \delta_0^{(\lambda)}(x). \tag{6}$$

其中 $\delta_0^{(\lambda)} \in \Delta$. 由此可以得到 λ 关于 $\mathscr{G}_i(= \mathrm{sp}\{g_{i1}, \cdots, g_{im_i}\})$ 的伴随矩阵.

$$\Gamma_i^{(\lambda)}(x) = \begin{bmatrix} c_{i11}^{(\lambda)}(x) \cdots & c_{i1m_1}^{(\lambda)}(x) & c_{i10}^{(\lambda)}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{ip_11}^{(\lambda)}(x) \cdots & c_{ip_1m_1}^{(\lambda)}(x) & c_{ip_10}^{(\lambda)}(x) \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \quad \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(m_i+1)\times(m_i+1)} \tag{7}$$

其中 $i = 1, 2$.

定理 设 Δ 在 $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ 的某个邻域 $\boldsymbol{U}$ 是非奇异的和结构可积的分布，$\mathscr{G}_i$ 和 $\mathscr{G}_i \cap \Delta (i = 1, 2)$ 在 $\boldsymbol{U}$ 内是非奇异的. G_i 和 Δ 是**结构相容**的，那么在 $\boldsymbol{U}$ 中 Δ 是 $(f; G_1, G_2)$ 结构不变分布的充要条件，即在 $\boldsymbol{U}$ 中成立：

1) $[f, \Delta] \subset \Delta + \mathscr{G}_1 + \mathscr{G}_2$, $[g_{ij}, \Delta] \subset \Delta + \mathscr{G}_i, j = 1, \cdots m_i, i = 1, 2$;

2) 当 Δ 具有式(3)的形式时，$\dfrac{\partial}{\partial x_{il}} (l = 1, \cdots, s_i, i = 1, 2)$ 的伴随矩阵 $\Gamma_i^{il}(x)$ 只依赖于 x_i，而 $\Gamma_j^{il}(x) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$.

充分性的证明基本类似于文献[1]的§6.2 节，此处从略. 而条件 1)的必要性也是直接的[1,2]. 所以，这里只给出条件 2)的必要性证明.

如果 Δ 在 $\boldsymbol{U}$ 中是结构 $(f; G_1, G_2)$ 不变分布，则由 $[(G_1Q_1)_j, \Delta] \subset \Delta$ 得到 $[(\tilde{G}_1(\tilde{Q}_1)_j, \Delta] \subset \Delta$，其中 $\tilde{Q}_1(x_1) = Q_1^{-1}(x_1)Q_1(x_1)$. 则对 $\lambda \in \Delta$ 成立：

$$\begin{aligned} [(\tilde{G}_1\tilde{\beta}_1)_j, \lambda] &= -\sum_{h=1}^{m_1} (L_\lambda \tilde{\beta}_{1kj})\tilde{g}_{1h} + \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{\beta}_{1kj}[\tilde{g}_{1k}, \lambda] \\ &= -\sum_{h=1}^{p_1} (L_\lambda \tilde{\beta}_{1hj})\tilde{g}_{1h} + \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{\beta}_{1kj} \sum_{h=1}^{p_1} c_{1hk}^{(\lambda)}\tilde{g}_{1h} + \delta_{1j}^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

其中 $\delta_{1j}^{(\lambda)} \in \Delta$. 最后等式利用了结构相容性、条件 1) 已知是必要的和式 (5). 由于 $\tilde{g}_{1h}$ $(h = 1, \cdots, p_1)$ 是独立的且 $\tilde{g}_{1h} \bar{\in} \Delta$，则

$$-L_\lambda \tilde{\beta}_{1hj} + \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{\beta}_{1kj} c_{1hk}^{(\lambda)} = 0. \tag{8}$$

类似地，记 $\tilde{\alpha}_1 = Q_1^{-1}\alpha_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2 = Q_2^{-1}\alpha_2$ 后，可得

$$\begin{aligned} [f + \tilde{G}_1\tilde{\alpha}_1 + \tilde{G}_2\tilde{\alpha}_2, \lambda] = &\sum_{h=1}^{p_1} \left(c_{1h0}^{(\lambda)} - L_\lambda \tilde{\alpha}_{1h} + \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{\alpha}_{1k} c_{1hk}^{(\lambda)} \right) \tilde{g}_{1h} \\ &+ \sum_{h=1}^{p_2} \left(c_{2h0}^{(\lambda)} - L_\lambda \tilde{\alpha}_{2h} + \sum_{k=1}^{m_2} \tilde{\alpha}_{2k} c_{2hk}^{(\lambda)} \right) \tilde{g}_{2h} + \delta_0^{(\lambda)} \end{aligned}$$

以及

$$-L_{\lambda}\tilde{\alpha}_{1h} + \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{\alpha}_{1k} c_{1hk}^{(\lambda)} + c_{1h0}^{(\lambda)} = 0, \quad h = 1, \cdots, p_1, \tag{9a}$$

$$-L_{\lambda}\tilde{\alpha}_{2h} + \sum_{k=1}^{m_2} \tilde{\alpha}_{2k} c_{2hk}^{(\lambda)} + c_{2h0}^{(\lambda)} = 0, \quad h = 1, \cdots, p_2. \tag{9b}$$

当Δ具有(3)式的形式时,将 λ 逐次取成 $\frac{\partial}{\partial x_{1l}}$, $l = 1, \cdots, s_1$, 则(8)式成为

$$-\frac{\partial}{\partial x_{1l}} \tilde{B}_{1hj} + \sum_{k=1}^{m_1} \tilde{B}_{1kj} c_{1hk}^{(1l)} = 0, \quad h = 1, \cdots, p_1; j = 1, \cdots m_1. \tag{10}$$

由于 $\tilde{B}_1$ 是 x_1 的可逆矩阵,故而从(10)式中可以解出 $c_{1hk}^{(1l)}$ 来,它只是 x_1 的函数. 将此结果代入式 (9a), $c_{1h0}^{(1l)}$ 也只是 x_1 的函数,从而 Γ_1^{1l} 只含 x_1. 另外$\left[(\tilde{G}_2\tilde{B}_2)_j, \frac{\partial}{\partial x_{1l}}\right] = 0$, 从而 $c_{2hk}^{(1l)}$ 都可取成零. 再由式 (9b) $c_{2h0}^{(1l)} = 0$, 即 $\Gamma_2^{1l} = 0$. 对 Γ_i^{2l} 的证明相同(从略). 必要性证毕.

最后, 需要强调指出的是: 这里定义的结构可积分布以及结构相容性都是由于系统的分散信息结构而产生的,它有着明显的实际背景.

参 考 文 献

[1] Isdori A. Nonlinear control systems: An introduction. Springer-Verlag, Berlin: 2-nd edition, 1989.

[2] 程代展. 非线性系统的几何理论. 科学出版社,1988.

A SUFFICIENT AND NECESSARY CONDITION FOR STRUCTURE (f,G_i) INVARIANT DISTRIBUTIONS

HAN ZHENGZHI GAO FENG ZHANG ZHONGJUN

(Department of Automatic Control, Shanghai Jiaotong University Shanghai 200030 *China)*

Key words: Nonlinear decentralized system, structural invariant distribution, structure compatible.