

基于主导能量分析的模型降阶方法

章卫国 薛璞
(西北工业大学,西安)

关键词: 主导能量,模型,特征根.

一、引言

模型简化是高阶系统分析与设计中的一个重要问题。近年来,许多国内外学者提出了不少模型降阶方法。按系统各模态对输出的能量贡献来确定主导特征根的降阶方法^[1]就是其中之一,文献[2]将其推广到多变量的情形。这一方法计算简单,可保证降阶模型的稳定性,但目前只讨论了系统特征根均为单根的情况。本文将文献[1]做了推广,对含重特征根的系统提出了一种模型降阶方法。

二、系统含重特征根时,主导特征根确定

1. 连续系统

不失一般性,设 n 阶系统有一对重特征根为 $\mu_n = \mu_{n-1}$,其传递函数为

$$G(s) = \frac{A_{21} + A_{22}s + \dots + A_{2n}s^{n-1}}{A_{11} + A_{12}s + \dots + A_{1n}s^{n-1} + A_{1,n+1}s^n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{s - \mu_i} + \frac{h_n}{(s - \mu_{n-1})^2}, \quad (1)$$

系统的脉冲响应为

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n-1} h_i \exp(\mu_i t) + h_n t \exp(\mu_{n-1} t). \quad (2)$$

当输入 $z(t)$ 为白噪声时, $E(z(t)z(t-\tau)) = \sigma_z^2 \delta(\tau)$, 系统的输出为

$$y(t) = \int_{-\infty}^t g(t-t')z(t')dt' = \int_0^{\infty} g(\theta)z(t-\theta)d\theta, \quad (3)$$

这样 $y(t)$ 的自相关函数为

$$\gamma(\tau) = E[y(t)y(t-\tau)] = \sigma_z^2 \int_0^{\infty} g(\theta)g(\tau+\theta)d\theta. \quad (4)$$

考虑到式(2),得到

$$\gamma(\tau) = \sum_{i=1}^{n-2} d_i \exp(\mu_i \tau) + d_{n-1}(\tau) \exp(\mu_{n-1} \tau), \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} d_j = \sigma_z^2 \left[\frac{h_n h_j}{(\mu_j + \mu_{n-1})^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i h_j}{-(\mu_i + \mu_j)} \right], & j = 1, 2, \dots, n-2, \\ d_{n-1}(\tau) = \sigma_z^2 \left[\frac{h_n h_{n-1}}{4\mu_{n-1}^2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i h_{n-1}}{-(\mu_i + \mu_{n-1})} \right] + \sigma_z^2 \left[\frac{h_n^2 (\mu_{n-1} \tau - 1)}{4\mu_{n-1}^3} \right. \\ \left. + h_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i - h_i \tau (\mu_i + \mu_{n-1})}{(\mu_i + \mu_{n-1})^2} \right]. \end{cases} \quad (6)$$

当输入是白噪声时, $|d_j|$ 可反映第 j 个模态对系统输出 $y(t)$ 的能量贡献。

定义一个相对能量指标为

$$D_j = \frac{d_j}{|d_1| + |d_2| + \dots + |d_{n-1}(0)|}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (7)$$

D_j 可用来衡量第 j 个模态在输出能量中所占的比例。根据 D_j 的大小, 就可确定系统的主导特征根, 从而确定降阶模型的阶次及相应的特征多项式, 再结合 Padé 逼近法^[3] 就可得到降阶模型。

2. 离散系统

设 n 阶离散系统有一对重特征根 $\mu_{n-1} = \mu_n$, 系统的传递函数为

$$G(z^{-1}) = \frac{A_{21} + A_{22}z^{-1} + \dots + A_{2n}z^{-(n-1)}}{A_{11} + A_{12}z^{-1} + \dots + A_{1n}z^{-(n-1)} + A_{1,n+1}z^{-n}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{1 - \mu_i z^{-1}} + \frac{h_n z^{-1}}{(1 - \mu_{n-1} z^{-1})^2}, \quad (8)$$

假定 $\mu_i = e^{\lambda_i T}$, 那么

$$G(z^{-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i}{1 - e^{\lambda_i T} z^{-1}} + \frac{h_n z^{-1}}{1 - e^{\lambda_{n-1} T} z^{-1}}. \quad (9)$$

系统的单位脉冲响应为

$$g(kT) = \sum_{i=1}^{n-1} h_i e^{\lambda_i kT} + h_n k e^{\lambda_{n-1} T(k-1)}, \quad (10)$$

当输入白噪声序列时, 输出的自相关函数为

$$\gamma(\tau) = \sigma_z^2 \sum_{M=0}^{\infty} g(MT) g(MT + \tau T). \quad (11)$$

考虑到式(10), 则

$$\gamma(\tau) = \sum_{i=1}^{n-2} d_i \mu_i^\tau + d_{n-1}(\tau) \mu_{n-1}^\tau, \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} d_j = \sigma_z^2 \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i h_j}{1 - \mu_i \mu_j} + \frac{h_n h_j \mu_j}{(1 - \mu_j \mu_{n-1})^2} \right], & j = 1, 2, \dots, n-2, \\ d_{n-1}(\tau) = \sigma_z^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i h_{n-1}}{1 - \mu_i \mu_{n-1}} + \frac{h_n h_{n-1} \mu_{n-1}}{(1 - \mu_{n-1}^2)^2} + \frac{h_n^2 [1 + \mu_{n-1}^2 + (1 - \mu_{n-1}^2) \tau]}{(1 - \mu_{n-1}^2)^3} \right. \\ \left. + h_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_i [\mu_i \mu_{n-1} + (1 - \mu_i \mu_{n-1}) \tau]}{\mu_{n-1} (1 - \mu_i \mu_{n-1})^2} \right\}. \end{cases} \quad (13)$$

将 d_i 代入式(7), 便可确定离散系统的主导特征根, 再结合 Padé 逼近法, 即可得到降阶模型。

上面导出的公式(6), (7), (13)对系统特征根均为单根的情形也是适用的(只要将 h_n 置零即可)。

算例. 设某系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{118 + 562s + 217s^2 + 22s^3}{50 + 70s + 47s^2 + 2s^3 + s^4}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \frac{h_i}{s - \mu_i} + \frac{h_4}{(s - \mu_4)^2}$$

其中 $\mu_1 = 1 + i$, $\mu_2 = 1 - i$, $\mu_3 = -5$, $\mu_4 = -5$. $h_1 = 10 + 8i$, $h_2 = 10 - 8i$, $h_3 = 2$, $h_4 = -1$. 由式(6), (7)可确定主导特征根为 $\mu_1 = -1 + i$, $\mu_2 = -1 - i$, 再结合 Padé 逼近法确定降阶模型为

$$R(s) = \frac{4.72 + 20.592s}{2 + 2s + s^2}$$

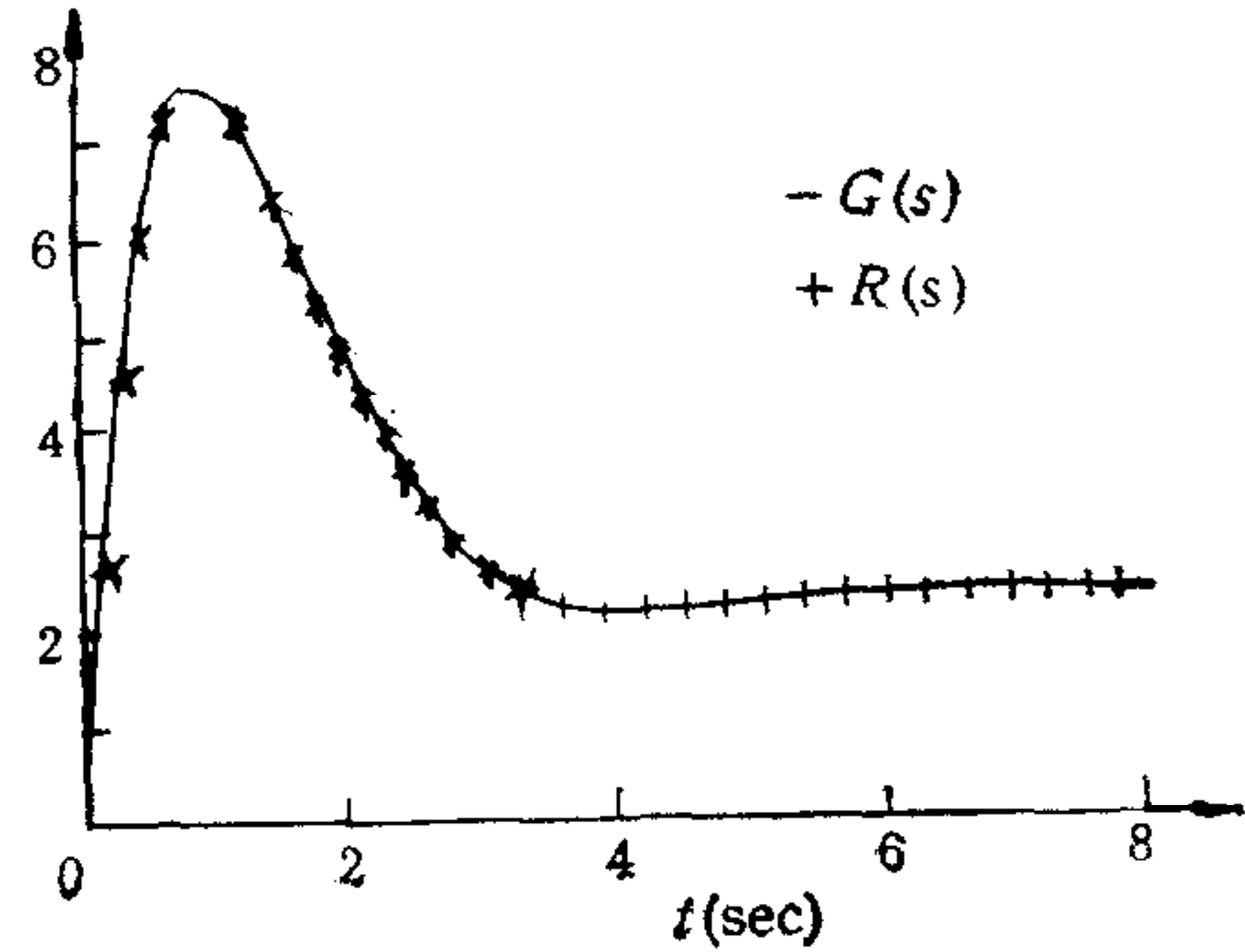


图 1 原系统与降阶模型对阶跃函数的响应

三、结 论

本文对连续系统与离散系统给出了确定主导特征根的依据。所得到的公式可用于特征根均为单根和有重特征根的系统。文中给出的方法不仅能够保证降阶模型的稳定性, 而且降阶模型与原系统具有较高的动态和稳态拟合精度。还有计算简单, 便于上机等优点。

参 考 文 献

- [1] Liaw, C.M., Pan, C.T. and Chen, Y.C., Reduction of Transfer Functions Using Dispersion Analysis and the Continued Fraction Method, *Int. J. System Sci.*, **17**(1986), 5,807-817.
- [2] 胡寿松、章海清, 基于主导能量法和 Padé 逼近法的多变量系统的模型简化, *南京航空学院学报*, (1987), 2, 32-39.
- [3] Baker, G.A., *Essentials of Padé approximants*, Oxford, Pergamon Press (1975).

A MODEL REDUCTION METHOD BASED ON DOMINANT ENERGY ANALYSIS

ZHANG WEIGUO XUE PU

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)

Key words: Dominant energy; model; eigenvalue.