第 22 卷 第 5 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 22, No. 5
1996 年 9 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Sep., 1996

短文

基于系统矩阵实 Schur 分解的集结法模型降阶[1)]

王炎生　陈宗基
(北京航空航天大学自动控制系　北京　100083)

摘　要

通过有序实 Schur 分解将系统矩阵变成分块对角阵，得到一种数值稳定的集结法模型降阶，并给出降阶的 L^∞-误差界. 降阶系统保留了原系统的主导极点且为最小实现.

关键词: 模型降阶，集结法，实 Schur 分解.

1　引言

模型降阶方法对简化高阶动态系统以及对由 H_∞, LQG/LTR 等现代控制设计方法得到的高阶控制器进行降阶都是必要的. 因为系统矩阵决定了系统的极点，而对系统的稳定性、时间响应等性能影响大的是主导极点(即实部大的极点)，所以通过保留系统的主导极点可以达到降阶.

对 n 阶稳定系统 $\Sigma(A,B,C)$，文献[1]对 A 作 Schur 分解得到上三角矩阵，对角线元素恰好为 A 的全部特征根且按实部递减的顺序排列. 记变换后的系统为 $\Sigma(A_s,B_s,C_s)$. 其中

$$A_s=\begin{bmatrix}S_1 & S_{12}\\ 0 & S_2\end{bmatrix},\ B_s=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix},\ C_s=[C_1,\quad C_2]. \tag{1}$$

若 S_1 的特征根实部远远大于 S_2 的特征根实部，选降阶系统为 $\Sigma(S_1,\ B_1-S_{12}S_2^{-1}B_2,\ CA_s^{-1}B_s(S_1^{-1}(B_1-S_{12}S_2^{-1}B_2))^+)$. 当 A 有复特征根时，这种方法将会导致状态空间实现含有复数，不好处理. 另外，求逆和求广义逆会遇到数值病态问题. 文献[2]利用系统矩阵的 Jordan 标准型进行了改进，但得到 Jordan 标准型所用的相似变换是数值不稳定的.

本文对系统矩阵作有序实 Schur 分解将其化成分块上三角阵，然后通过解一个 Sylvester 方程将其进一步化成一个对角分块矩阵. 于是原系统可分为两个子系统之和，以主导极点子系统作为降阶系统. 这种模型降阶方法保留了原系统的主导极点，同时还是一种集结法，因而具有输出误差小的优点. 最后，本文还给出了降阶的 L^∞-误差上界.

---

1) 博士后科学基金和航空科学基金资助项目.
本文于 1995 年 2 月 27 日收到

2 降阶算法和降阶系统

考虑完全可控且完全可观的 n 阶稳定系统 $\Sigma(A,B,C)$，其中 $A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times p}$，$C\in R^{q\times n}$，A 的特征根按实部递减顺序排列为，$\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A)$,$\mathrm{Re}\{\lambda_k(A)\}\gg\mathrm{Re}\{\lambda_{k+1}(A)\}$,则由文献[3]知,存在正交矩阵 U，使得 A 的有序实 Schur 分解为

$$S=U^{\tau}AU=\begin{bmatrix}A_1 & A_{12}\\ 0 & A_2\end{bmatrix}. \tag{2}$$

其中 $A_1\in R^{k\times k}$,$A_2\in R^{(n-k)\times(n-k)}$，$\lambda_i(A_1)=\lambda_i(A)$,$i=1,2,\cdots,k$.

为使 S 变成分块对角矩阵,对 S 作相似变换

$$V=\begin{bmatrix}I & X\\ 0 & I\end{bmatrix},\ X\in R^{k\times(n-k)}. \tag{3}$$

解 Sylvester 方程

$$A_1X+A_{12}-XA_2=0, \tag{4}$$

得到 X,则 $V^{-1}SV=\mathrm{diag}(A_1,A_2)$.

于是,在变换 $T=UV$ 下,原系统变成 $\Sigma(A_t,\ B_t,\ C_t)$,
其中

$$A_t=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix},B_t=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix},\ C=[C_1,\ C_2]. \tag{5}$$

由于 U 为正交矩阵且解 Sylvester 方程是数值可靠的[3],所以变换 $T=UV$ 是数值稳定的.

记

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=C_t(sI-A_t)^{-1}B_t, \tag{6}$$

$$G_1(s)=C_1(sI-A_1)^{-1}B_1,\ G_2(s)=C_2(sI-A_2)^{-1}B_2, \tag{7}$$

则有

$$G(s)=G_1(s)+G_2(s). \tag{8}$$

取子系统 $\Sigma(A_1,B_1,C_1)$ 为降阶系统,于是有定理 1.

定理 1. 用上述降阶算法得到降阶系统 $\Sigma(A_1,B_1,C_1)$,则该算法是一种集结法,降阶系统稳定,完全可控且完全可观并保留了原系统的主导极点.

证明. 取集结矩阵为 $K=(I_k,0)\in R^{k\times(n-k)}$,则由

$$A_1K=[A_1,0],\ KA_t=[A_1,0],\ B_1=KB_t,C_1=C_tK^+ \tag{9}$$

知降阶算法为集结法. 而由 A_1 的取法知降阶系统稳定且保留了原系统的主导极点.

设Σ (A_t,B_t,C_t) 的可控 Gramian 和可观 Gramian 分别为 P_t 和 Q_t,

$$P_t=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^{\tau} & P_{22}\end{bmatrix},\quad Q_t=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12}^{\tau} & Q_{22}\end{bmatrix},\ P_{11},\ Q_{11}\in R^{k\times k}, \tag{10}$$

则有

$$A_1P_{11}+P_{11}A_1^{\tau}+B_1B_1^{\tau}=0,\ A_1^{\tau}Q_{11}+Q_{11}A_1+C_1C_1^{\tau}=0, \qquad (11),(12)$$

由于 $\Sigma(A_t,B_t,C_t)$ 稳定,完全可控且完全可观,因此,根据文献[4]知,

$$P_t > 0,\ Q_t > 0. \tag{13}$$

而 P_{11},Q_{11} 分别为 P_t 和 Q_t 的主子块,所以,

$$P_{11} > 0,\ Q_{11} > 0, \tag{14}$$

据此及文献[4]就知 $\Sigma(A_1,B_1,C_1)$ 完全可控且完全可观．于是定理得证．

3 降阶算法的 L^∞-误差界

$G(s)$ 和 $\Sigma(A_t,B_t,C_t)$ 的 Hankel 奇异值定义为

$$\sigma_i(G(s)) = \{\lambda_i(P_tQ_t)\}^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

并且约定 $\sigma_i(\cdot) \geqslant \sigma_{i+1}(\cdot)$.

定理 2. 降阶算法的误差界为

$$\|G(j\omega) - G_1(j\omega)\|_{L^\infty} = \|G_2(j\omega)\|_{L^\infty} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n-k}\lambda_i^{\frac{1}{2}}(P_{22}Q_{22}), \tag{16}$$

且

$$\sum_{k+1}^{n}\sigma_i(G(s)) \leqslant \sum_{1}^{n-k}\sigma_i(G_2(s)) \leqslant \sum_{1}^{n-k}\sigma_i(G(s)). \tag{17}$$

证明．根据文献[4]可知(16)式成立．而由于 $Q_t > 0$,于是存在下三角矩阵 R,使得

$$Q_t = RR^\tau = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{11}^\tau & T_{21}^\tau \\ 0 & T_{22}^\tau\end{bmatrix},\quad R = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22}\end{bmatrix}, \tag{18}$$

因此,

$$Q_{22} = T_{21}T_{21}^\tau + T_{22}T_{22}^\tau. \tag{19}$$

又 $T_{22}^\tau P_{22}T_{22}$ 为 $R^\tau P_tR$ 的 $n-k$ 阶主子块,而 $R^\tau P_tR$ 与 P_tQ_t 的特征根完全相同,于是由文献[5]知,

$$\begin{aligned}\lambda_i(P_{22}Q_{22}) &\geqslant \lambda_i(T_{22}^\tau P_{22}T_{22}) \\ &\geqslant \lambda_{i+k}(P_tQ_t),\quad i = 1,2,\cdots,n-k,\end{aligned}$$

据此易证(17)成立．

由于系统的 Hankel 奇异值不仅取决于 A,还依赖于 B 和 C,所以本文提出的降阶方法与平衡截尾降阶方法[4]完全不同．前者保留了原系统的主导极点,输出误差小,而后者则选取了可控性和可观性强的状态,这两种方法可以互相补充．同文献[4]一样，通过先将不可控或不可观的状态去掉而对余下的子系统进行降阶，本文的方法可推广到非最小实现系统．

参　考　文　献

[1] Rachid A and Hashin G. Model reduction via Schur decomposition, *IEEE Trans*. 1992, **AC-37** (5): 666—668.

[2] 王炎生,陈宗基．基于 Jordan 标准型的模型降阶, 1993 控制理论及其应用年会论文集, 北京: 海洋出版社, 41—47.

[3] Golub G H and Van Loan C F. Matrix Computation. John Hopkins University Press, 1983, 219—226.

[4] Glover K. All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their

L^{∞}-error bounds, *Int. J. Control*, 1984, **39**(6): 1115—1193.
[5] Horn R A and Johnson C R. Matrix Analysis. Cambridge University Press, 1985, 181—198.

AGGREGATION MODEL REDUCTION BASED ON REAL SCHUR DECOMPOSITION OF SYSTEM MATRIX

WANG YANSHENG CHEN ZONGJI
(Dept. of Automatic Control, Beijing Univ. of Aero. & Astro., Beijing 100083)

ABSTRACT

In this paper, by transforming the system matrix into a blocked diagonal matrix, it obtains an aggregation model reduction algorithm with numerical stability, and gives a L^{∞}-error bound for model reduction. The reduced-order system retains the prominent poles and its realization is minimal.

Key words: Model reduction, aggregation method, real Schur decomposition.