

# 一种改进的 OFDM 自适应功率分配算法

郑培超, 宋瀚涛, 徐晓梅

(北京理工大学计算机科学技术学院, 北京 100081)

**摘要:** 注水分配算法是实现正交频分复用(OFDM)系统中功率和误比特率受限条件下总比特速率最大化的最优算法, 在估计目标值时, 常使用基于拉格朗日乘子法的二分算法。针对迭代过程中估计值偏离目标值时收敛较慢的情况, 提出混合二分算法。仿真结果证明, 该算法比二分算法具有更快的收敛速度。

**关键词:** 正交频分复用; 注水分配; 自适应调制; 功率分配

## Improved Power Allocation Algorithm for OFDM Systems

ZHENG Pei-chao, SONG Han-tao, XU Xiao-mei

(School of Computer Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

**【Abstract】** Water-filling distribution algorithm is the optimal algorithm for OFDM systems to maximize the overall bit rate under overall power and bit error rate constraints. Dichotomy combined Lagrange-multiplier method is used to estimate the target value. The algorithm has slow convergence when the estimated value is far from the target. This paper presents a mixed dichotomy to solve the problem. Simulation results show that the proposed algorithm has faster convergence than dichotomy.

**【Key words】** OFDM; water-filling distribution; adaptive modulation; power allocation

近年来, 随着个人无线数据业务的飞速发展, 正交频分复用(OFDM)技术越来越受到人们的关注。OFDM技术把可用的信道带宽划分为若干个较窄的正交的子信道, 由于频率正交, 相对一般的多载波系统, 节省了带宽, 提高了传输的可靠性和系统容量。同时, 在每个子载波中插入保护间隔和循环前缀, 有效地克服了符号间干扰。目前, OFDM已经被确定为下一代移动通信系统的核心技术<sup>[1]</sup>。在OFDM系统中, 自适应调制技术可以根据各子信道的增益动态选择相应的调制方式、分配功率和传输比特, 从而显著地提高系统性能。为了便于分析, 一般自适应算法都假设发射端已知准确的信道信息。现有的自适应算法一般使用 3 个约束条件: 总功率, 总比特速率和误比特率。根据不同的优化目标, 自适应OFDM算法主要分为 3 类: 总功率和总比特速率不变时误比特率最小化的MA(Margin Adaptive)算法, 比特速率和误比特率上限不变时发射功率最小化的算法, 功率和误比特率上限不变时比特速率最大化的RA(Rate Adaptive)算法。注水分配法是实现后 2 种算法的最佳解决方案, 但是该方法计算难度较大, 而且还要假设星座规模量化精度无限小, 这在实际应用中是不可能实现的。一种已知的用于多载波系统量化精度有限的算法是Hughes-Hartogs算法, 但是在子载波数量较大并且每个符号周期内包含的比特数也较大时, 该算法时间开销比较大。本文以系统的误比特率和总功率上限为约束条件, 以实现所分配的总比特速率最大化为优化目标, 结合使用拉格朗日乘子法的二分算法, 提出一种快速收敛的自适应功率分配算法。仿真结果证明本算法比二分算法具有更快的收敛速度。

### 1 模型与算法分析

#### 1.1 系统模型

考虑一个具有  $N$  个子载波的OFDM系统, 每个子载波带宽远小于频率选择性衰落信道的相干带宽。假设发射机能够

获得子载波的完整信道特性<sup>[2]</sup>, 系统要求的误比特率上限为  $BER_{\max}$ , 总功率上限为  $P_{\text{total}}^{\text{target}}$ , 第  $i$  个子载波分配的功率为  $p_i$ , 比特速率为  $r_i$ 。本文所指的比特速率均是在一个OFDM符号周期内。最优化的准则为

$$\max \sum_{i=1}^N r_i, \quad \sum_{i=1}^N p_i = P_{\text{total}}^{\text{target}} \quad (1)$$

记  $f_i(r_i)$  为信道增益为 1 时, 在子载波  $i$  上满足误比特率  $BER_{\max}$  要求, 接收  $r_i$  比特所需要的功率。 $M$  是每个子载波上所能传输的最大比特速率,  $|H_i|$  为子载波  $i$  的信道功率增益。发射端对子载波  $i$  的发射功率为

$$p_i = f_i(r_i) / |H_i|^2 \quad (2)$$

令  $g_i(x) = f_i^{-1}(x)$ , 得

$$r_i = g_i(p_i | H_i|^2) \quad (3)$$

对  $f_i(r)$  还有如下要求:

(1)  $f_i(0) = 0$  ;

(2) 根据最优化理论, 应该保证,  $\forall r \in D, D = \{0, 1, 2, \dots, M\}$ 。其中,  $f_i(r)$  为下凸函数, 即  $f_i(r+1) - f_i(r)$  随着  $r$  的增加而增加, 目前一般的编码方法和调制方式都满足这一点。可得  $g_i(p)$  为上凸函数, 即  $g_i(p+1) - g_i(p)$  随着  $p$  的增加而减小。

将式(3)代入式(1)可得, 在满足一定误比特率上限  $BER_{\max}$  的情况下的优化准则:

$$\sum_{i=1}^N p_i = P_{\text{total}}^{\text{target}}, \quad \max \sum_{i=1}^N g_i(p_i | H_i|^2) \quad (4)$$

上式约束条件为:  $r_i$  必须为整数比特/符号。

**作者简介:** 郑培超(1978 - ), 男, 博士研究生, 主研方向: B3G系统无线资源管理; 宋瀚涛, 教授; 徐晓梅, 博士研究生

**收稿日期:** 2007-01-17 **E-mail:** pczheng@netease.com

定义子信道的信噪比为<sup>[3]</sup>

$$SNR_i = \frac{|H_i|^2}{2\sigma_i^2} \quad (5)$$

以及信道噪声比：

$$CNR_i = \frac{p_i |H_i|^2}{2\sigma_i^2} \quad (6)$$

其中， $\sigma_i^2$ 表示子信道*i*中复高斯噪声的每维方差。

### 1.2 最优的拉格朗日乘子算法

利用拉格朗日乘子法，将式(1)的条件极值问题转化为非条件极值问题，引入拉格朗日乘子 $\lambda$ ，得

$$\min J(\lambda) = -\sum_{i=1}^N r_i + \lambda \sum_{i=1}^N p_i \quad (7)$$

给定 $\lambda$ ，计算 $J(\lambda)$ 的最小值，对每个子载波*i*，有

$$\frac{\partial J(\lambda)}{\partial p_i} = 0$$

即

$$\frac{\partial r_i}{\partial p_i} = \lambda \quad (i=1,2,3,\dots,N) \quad (8)$$

其中， $r_i$ 是 $p_i$ 的函数。对每个子载波，取比特速率-功率曲线上斜率为 $\lambda$ 的点对应的功率和比特速率时，就能在保证系统总功率限制的要求下，最大化总比特速率。于是问题就转化成寻找一个最佳的 $\lambda^*$ ，使得所分配的总功率满足 $P_{total}^{target}$ 限制，

同时总比特速率 $R_{total}^{target} = \sum_{i=1}^N r_i$ 最大。

### 1.3 整数比特限制

每个子载波上分配的比特速率必须为整数，因此在比特速率-功率曲线上得到一组离散的工作点。设置发射机的最小调制单位为 $P_{min}$ ，当总功率 $P_{total}$ 与目标总功率 $P_{total}^{target}$ 相差不到 $P_{min}$ 时，结束迭代过程。

### 1.4 二分算法

根据1.2节中的拉格朗日乘子法进行比特分配时，计算复杂度较大，一般使用迭代方法，由最初给定的 $\lambda$ 计算其对应的总功率，查看是否达到总功率限制，如果达到则结束算法，否则继续调整 $\lambda$ ，通过迭代逼近最佳结果。一般常用的迭代方法有查表法和二分法。查表法计算复杂度较低，缺点是当子载波数很大时，需要使用相当大的存储量。另一种常用的 $\lambda$ 搜索方法是二分法。算法描述如下：

(1) 初始化 $\lambda^{low}$ 和 $\lambda^{high}$ ， $\lambda^{low} > \lambda^{high}$ ，并且保证 $\lambda^{low} > \lambda^{target} > \lambda^{high}$ 。设置最大迭代次数 $k_{max}$ ，以保证在有限次数内结束算法。初始化迭代次数 $k=0$ 。

(2) 如果 $k=k_{max}$ ，表示已达到最大迭代次数，选择前面迭代过程中小于 $P_{total}^{target}$ 的 $P_{total}$ 最大值对应的 $\lambda$ ，设置为迭代的最终 $\lambda^*$ ，转到(6)，否则转到(3)。

(3)  $k=k+1$ ，根据 $\lambda^{low}$ 和 $\lambda^{high}$ 计算每个子信道*i*对应这两个 $\lambda$ 的功率和比特速率，分别得到： $p_i^{low}$ ， $r_i^{low}$ 和 $p_i^{high}$ ， $r_i^{high}$ 。累加分别得到对应的总功率和总比特速率： $P_{total}^{low}$ ， $R_{total}^{low}$ 和 $P_{total}^{high}$ ， $R_{total}^{high}$ 。新的 $\lambda$ 值计算方法为

$$\lambda^{new} = \frac{P_{total}^{high} - R_{total}^{low}}{P_{total}^{high} - P_{total}^{low}} \quad (9)$$

(4) 根据 $\lambda^{new}$ 去计算每个子信道*i*的 $p_i^{new}$ 和 $r_i^{new}$ ，如果求得的总功率 $P_{total}^{new}$ 满足 $P_{total}^{new} = P_{total}^{target}$ ，或者 $|P_{total}^{new} - P_{total}^{target}| < P_{min}$ ，且 $P_{total}^{new} < P_{total}^{target}$ ，那么设置 $\lambda^* = \lambda^{new}$ ，转到(6)，否则转到(5)。

(5) 比较 $P_{total}^{new}$ 和 $P_{total}^{target}$ ，如果 $P_{total}^{new} > P_{total}^{target}$ ，则保持 $\lambda^{low}$ 不变，用 $\lambda^{new}$ 代替 $\lambda^{high}$ ；如果 $P_{total}^{new} < P_{total}^{target}$ ，则用 $\lambda^{new}$ 代替 $\lambda^{low}$ ，保持 $\lambda^{high}$ 不变，转到(2)，否则转到(6)。

(6) 根据 $\lambda^*$ 计算每个子载波*i*的功率 $p_i^*$ ，这就是发射机在该子载波的发射功率，算法结束。

上述算法计算复杂度低，迭代次数相对较小，也不像查表法需要占用大量的内存空间。根据式(9)计算得到的 $\lambda^{new}$ 近似于 $\lambda$ 的搜索区间( $\lambda^{high}$ ,  $\lambda^{low}$ )中心位置对应的 $\lambda$ 值。因此，在迭代过程中，当 $\lambda^{target}$ 偏离 $\lambda$ 的搜索区间的中心位置，即靠近一个界限，而远离另一个界限时，此时根据式(9)计算 $\lambda^{new}$ ，需迭代多次才能逼近 $\lambda^{target}$ 。特别是在开始时，必须将搜索区间的边界 $\lambda^{high}$ 和 $\lambda^{low}$ 设置得相距较远，以保证目标 $\lambda$ 值( $\lambda^{target}$ )能落入该搜索区间，这更有可能导致 $\lambda^{target}$ 偏离搜索区间的中心位置。如图1所示的子载波*i*的功率-比特速率曲线中， $\lambda^{target}$ 接近 $\lambda^{high}$ ，而远离 $\lambda^{low}$ ，使用式(9)估计的 $\lambda^{new}$ 对 $\lambda^{target}$ 的逼近程度不大，甚至不如 $\lambda^{high}$ 对 $\lambda^{target}$ 的逼近程度。针对这一问题，使用如下算法对二分法进行改进。

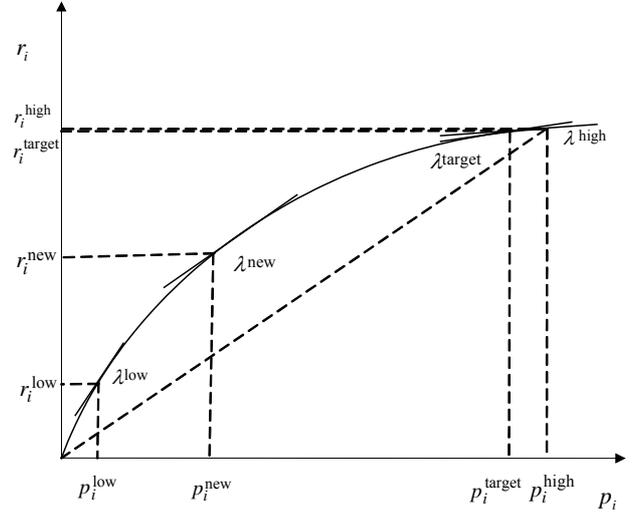


图1 子载波*i*的功率-比特速率曲线

### 1.5 快速收敛的自适应迭代算法

把式(3)代入式(8)，得

$$\lambda = \frac{\partial r_i}{\partial p_i} = |H_i|^2 g'_i(p_i | H_i |^2) \quad (10)$$

由1.1节中 $f_i(r)$ 的第2点要求可知， $g'_i(p)$ 随着 $p$ 的增大而减小， $|H_i|^2$ 在一个OFDM符号周期内是定值，那么 $\lambda$ 随着 $p_i$ 的增大而减小。

根据上面的结论可知，当迭代过程中总功率 $P_{total}$ 接近于 $P_{total}^{target}$ 时， $\lambda$ 也接近于 $\lambda^{target}$ ，那么可以根据 $P_{total}$ 与 $P_{total}^{target}$ 的逼近程度去估计 $\lambda$ 值与目标 $\lambda^{target}$ 的逼近程度。即在迭代过程中按 $P_{total}^{target}$ 在区间( $P_{total}^{low}$ ,  $P_{total}^{high}$ )中的相对位置来估计下一次迭代的 $\lambda^{new}$ ，可称作功率二分法：

$$\lambda^{new} = \lambda^{low} + \alpha(\lambda^{high} - \lambda^{low}) \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{(R_{total}^{target} - R_{total}^{low})}{(R_{total}^{high} - R_{total}^{low})} \quad (12)$$

功率二分法在通常状况下收敛速度不如二分法，但当 $\lambda^{target}$ 偏离 $\lambda$ 的搜索区间的中心位置较大时，逼近幅度较二分法大。如图1所示，目标工作点接近于搜索区间上限 $\lambda^{high}$ 对应的工作点，式(12)中的 $\alpha$ 值接近于1，从而由式(11)计算所

得的  $\lambda^{\text{new}}$  必定接近于  $\lambda^{\text{high}}$ ，同时也接近  $\lambda^{\text{target}}$ 。因此，本算法在这种情况下，收敛速度优于二分法。

将功率二分法与二分法进行结合，生成一种新的混合二分法。当一次迭代开始前  $P_{\text{total}}^{\text{target}}$  偏离总功率区间的中心  $((P_{\text{total}}^{\text{low}} + P_{\text{total}}^{\text{high}})/2)$  较大时，使得功率二分法起的作用相对较大，反之，则使得二分法起的作用相对较大。令

$$\beta = (P_{\text{total}}^{\text{high}} + P_{\text{total}}^{\text{low}})/2 - P_{\text{total}}^{\text{target}} / (P_{\text{total}}^{\text{high}} - P_{\text{total}}^{\text{low}}) \quad (13)$$

则  $\beta$  为迭代过程中目标总功率  $P_{\text{total}}^{\text{target}}$  与功率区间中心的偏离因子，有  $\beta \in [0, \frac{1}{2})$ 。

改进后的  $\lambda^{\text{new}}$  计算方法为

$$\lambda^{\text{new}} = (1 - \rho(2\beta)\mu) \frac{(R^{\text{high}} - R^{\text{low}})}{(P_{\text{total}}^{\text{high}} - P_{\text{total}}^{\text{low}})} + \rho(2\beta)\mu(\lambda^{\text{low}} + \alpha(\lambda^{\text{high}} - \lambda^{\text{low}})) \quad (14)$$

其中， $\mu$  1，是二分法和功率二分法的指数权重， $\mu$  越小，则功率二分法占的比重越大，反之，二分法占的比重越大； $\rho \in [0, 1]$ ，是二分法和功率二分法的线性权重， $\rho$  越大，则功率二分法占的比重越大，反之，二分法占的比重越大。

## 2 仿真与结果分析

取 OFDM 系统子载波数  $N=256$ ，每个子载波采用 MQAM 调制方式，可传输的比特数为  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ ，可用的调制方式为：无调制，4QAM，16QAM，64QAM 和 256QAM。取误比特率上限  $BER_{\text{max}}=10^{-7}$ 。取最大迭代次数  $k_{\text{max}}=15$ ， $\mu=2$ ， $\rho=0.9$ 。图 2 给出了上述 3 种算法的仿真结果。

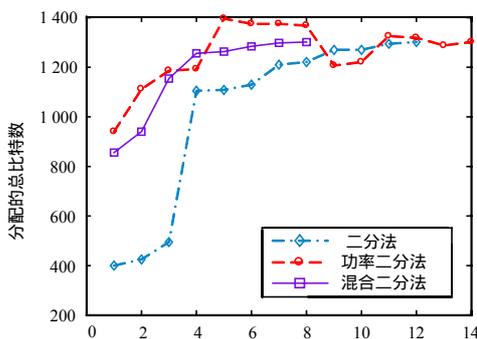


图 2 迭代过程比特分配

由仿真结果可知：

(1)在第 1 次迭代时，功率二分法分配的总比特速率最大，为 938.621 3，混合二分法为 853.206 1，二分法最小，为 398.297 6。这是由于为了保证目标  $\lambda$  能够落入初始的  $\lambda$  搜索区间，而将该区间设置得较大，从而导致目标  $\lambda$  偏离  $\lambda$  搜索

区间的中心。在这种情况下，功率二分法对目标值的逼近速度明显快于二分法；混合二分法属于二者的结合，逼近速度介于二者之间。但在之后的迭代过程中，二分法和混合二分法分配的总功率逐渐增加，直到最后收敛于目标值；而功率二分法并非一直增加，在目标值的两侧发生了几次震荡，收敛速度时快时慢。这说明功率二分法在迭代过程中平均的估计准确性不高，仅在目标  $\lambda$  偏离  $\lambda$  搜索区间的中心时效果较好。

(2)混合二分法和二分法能够一直稳定地收敛到目标值，而混合二分法比二分法收敛速度更快。二分法约在第 12 步时收敛，功率二分法为 14 步，而混合迭代法最少，约为 8 步。

(3)如表 1 所示的算法复杂度和功率余量的比较，3 种算法的复杂度均可表示为  $O(M \times N)$ ，其中， $M$  是迭代步数， $N$  是子载波数。3 种算法在仿真中的子载波数相同，也就是  $N$  相同。根据迭代步数可知，混合二分法复杂度最低，二分法其次，功率二分法最高。仿真结果表明，本文提出的算法比二分法具有更快的收敛速度。

表 1 算法复杂度和功率余量比较

算法	复杂度	迭代次数
二分法	$O(M \times N)$	12
功率二分法	$O(M \times N)$	14
混合二分算法	$O(M \times N)$	8

## 3 结束语

本文研究了 OFDM 系统中基于拉格朗日乘子法的自适应比特分配算法，针对二分法在目标  $\lambda$  偏离估计区间中心时，收敛速度较慢的问题进行了改进。提出了按比特速率估计  $\lambda$  值的算法，并将该算法与二分法结合，提出一种新的快速收敛的自适应 OFDM 比特分配算法。仿真结果表明，本文算法相比二分法具有更快的收敛速度，计算复杂度更低，因此可以作为 OFDM 系统自适应比特分配最优算法。

### 参考文献

- [1] Shen Zukang, Andrews J G, Evans B L. Adaptive Resource Allocation in Multiuser OFDM Systems with Proportional Rate Constraints[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2005, 4(6): 2726-2737.
- [2] Munz G, Pfletschinger S, Speidel J. An Efficient Waterfilling Algorithm for Multiple Access OFDM[C]//Proc. of Global Telecommunications Conference. [S. l.]: IEEE Press, 2002: 681-685.
- [3] Lozano A, Tulino A M, Verdu S. Mercury/Waterfilling for Fixed Wireless OFDM Systems[C]//Proc. of Radio and Wireless Symposium. [S. l.]: IEEE Press, 2006: 211-214.

(上接第 36 页)

## 4 结束语

城市规划涉及到多学科交叉综合应用，随着经济、社会的发展和和谐环境的要求越来越高，城市规划必然要不断借助其他学科的成果，提高规划的科学性和准确性。GIS 和遥感技术在很多领域有着广泛的应用，并取得了很多成果。但不同行业的技术特点要求有所不同，应把城市规划需求和高新技术特点结合起来，努力提高规划的科学性和准确性。

### 参考文献

- [1] 钮心毅. 地理信息系统在城市设计中的应用[J]. 城市规划汇刊, 2002, 5(4): 41-46.
- [2] 艾斌. 矢量化地形图自动处理系统算法的设计与实现[J]. 计算机工程, 2003, 29(11): 166-168.
- [3] 李玲玲. 基于数学形态学的灰度线形态识别研究与开发[J]. 计算机工程与应用, 2002, 38(11): 104-106.