第22卷 第1期 自 动 化 学 报 Vol. 22, No.1
1996年1月 ACTA AUTOMATICA SINICA Jan., 1996

短 文

基于 OIVPM 的特征值确定 ARMA 模型的结构[1)]

肖创柏 罗 晖 李衍达
(清华大学自动化系，北京 100084)

摘 要

基于最小描述长度(MDL)准则，提出了一种新的自回归滑动平均(ARMA)模型结构辨识方法. 该方法将ARMA模型的结构辨识分两步进行：首先利用超定辅助变量乘积矩(OIVPM)的最小特征值确定自回归(AR)部分的阶，然后利用协方差矩阵的特征值估计滑动平均(MA)部分的阶. 方法的可行性与有效性通过大量的数值仿真得到验证.

关键词：ARMA模型，结构辨识，最小描述长度准则，辅助变量.

1 引言

ARMA模型是一种非常重要的有理模型，它在语音信号建模、生物医学信号处理、谱估计等许多领域都有广泛的应用. 在实际中模型的阶事先是不知道的，并且必须在参数估计之前辨识出来，因而确定模型的阶是ARMA 模型辨识问题关键的一步. 针对定阶问题，最终预测误差准则(FPE)以及信息准则(AIC)是较为常用的方法，它们在渐近意义上是等价的，但是它们得不到模型阶的一致性估计[1]. 另一种比较有效的准则是MDL准则，文献[2]已证明了利用MDL准则可以得到模型结构的一致性估计.

基于FPE、AIC和MDL准则，产生了许多种定阶方法，但它们中的大多数都是根据预测误差方差确定模型的结构，从而导致这些方法十分费时. 最近，文献[3]根据MDL准则提出了一种基于协方差阵特征值的定阶方法，它相对于其它基于MDL准则的定阶方法具有减少计算量的潜力，能够得到模型结构的准确估计. 然而，假如模型阶(p, q)的取值范围较大，对每个(p, q)对都要计算定阶参数，其计算量仍然是惊人的. 为此本文提出一种新的ARMA模型定阶方法，该方法基于MDL准则，将模型定阶分两步进行：即首先确定AR部分的阶p，然后估计MA部分的阶q. 在确定阶p中，我们定义了OIVPM矩阵，推导了该矩阵的特征值与MDL准则的关系，然后基于该矩阵的最小特征值确定AR部分的阶p. 当估计完p之后，可按文献[3，4]中的方法利用样本协方差矩阵的特征值或奇异值估计MA部分的阶q. 本文主要集中于确定AR部分的阶p.

1）本文得到国家自然科学基金资助，曾在第五届全国信号处理学术会议上宣读.
本文于1994年1月14日收到

2 基于OIVPM 特征值的定阶方法

考虑用差分方程表示的时间序列 ARMA 模型:

$$y_t = -\sum_{i=1}^{p} a_i y_{t-i} + \sum_{i=0}^{q} c_i e_{t-i} \tag{1}$$

其中 y_t 是输出观测数据序列, e_t 是零均值方差为 σ^2 的高斯白噪声序列, $c_0=1$. 并且假定该模型满足稳定、时不变、可逆以及没有零极点对消 ($a_p \neq 0$, $c_q \neq 0$)的条件.

方程(1)可写成如下的矩阵形式

$$Y_p \theta_p = W_p . \tag{2}$$

其中

$$Y_p = \begin{bmatrix} y_0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_p & y_{p-1} & \cdots & y_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_{N-1-p} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\theta_p = [a_0, a_1, \cdots, a_p]^{\mathrm{T}}, \tag{3.2}$$

$$W_p = [w_0, w_1, \cdots, w_{N-1}]^{\mathrm{T}} \left(w_t = \sum_{i=0}^{q} c_i e_{t-i} \right). \tag{3.3}$$

在上面的方程中, $a_0=1$, N 和 T 分别表示数据长度和矩阵转置运算. 为了利用 MDL 准则, 我们引入一个扩展辅助变量矩阵

$$Z_k = \begin{bmatrix} z_0 & 0 & \cdots & 0 \\ z_1 & z_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_k & z_{k-1} & \cdots & z_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{N-1} & z_{N-2} & \cdots & z_{N-1-k} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

其中 z_t 是辅助变量序列. 众所周知, 辅助变量序列应与观测序列 y_t 高度相关, 而与噪声 w_t 不相关, 即当 $k=p$ 时有:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} Z_p^{\mathrm{T}} W_p = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} Z_p^{\mathrm{T}} Y_p = R, \ \det R \neq 0. \tag{5}$$

辅助变量的选取有多种方法, 只要其满足(5)式所示的条件[5]. 在标准辅助变量算法中, 辅助变量矩阵中的 k 取值为 p. 本文取 k 大于 p, 因而称 Z_k 为扩展辅助变量矩阵或超定辅助变量矩阵[6]. 用 $\frac{1}{N} Z_k^{\mathrm{T}}$ 左乘(2)式两边, 且定义 $V_k = \frac{1}{N} Z_k^{\mathrm{T}} W_p$, 我们可得到下面的超定方程组

$$\frac{1}{N} Z_k^{\mathrm{T}} Y_p \theta_p = V_k . \tag{6}$$

其中 $V_k=[v_0, v_1, \cdots, v_k]^{\mathrm{T}}$，为零均值方差为 σ_v^2 的高斯白噪声，表示辅助变量的选取和有限样本的影响等所引起的误差．若定义 D_p 为

$$D_p = \frac{1}{N} Z_k^{\mathrm{T}} Y_p . \tag{7}$$

则(6)式可写成更加简洁的形式

$$D_p \theta_p = V_k . \tag{8}$$

进一步，我们定义OIVPM矩阵为

$$R_p = D_p^{\mathrm{T}} D_p . \tag{9}$$

则 R_p 是维数为 $(p+1)\times(p+1)$ 的对称半正定矩阵，包含有AR部分阶 p 的信息．文献[7]已指出在不存在观测噪声和(或)模型噪声时，当 p 大于等于模型的真实阶时，观测数据的协方差矩阵存在值为零的特征值．OIVPM矩阵实质上是协方差矩阵的一种推广，也存在与协方差矩阵类似的性质．因而，我们可以利用矩阵 R_p 和MDL准则来确定AR部分的阶 p.

MDL准则按下式定义为模型参数的极大似然估计的对数似然函数与模型参数个数和所使用样本个数的惩罚函数之和

$$J_{\mathrm{MDL}}(p) = -\log f(V_k) + \frac{1}{2}(p+1)\log(k+1). \tag{10}$$

其中 $f(\cdot)$ 是向量 V_k 的概率密度函数．由于 v_k 是零均值方差为 σ_v^2 的白噪声序列，因而有:

$$\begin{aligned} f(V_k) &= \frac{1}{(2\pi\sigma_v^2)^{(k+1)/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2} V_k^{\mathrm{T}} V_k\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma_v^2)^{(k+1)/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_v^2} \theta_p^{\mathrm{T}} R_p \theta_p\right] \end{aligned} \tag{11}$$

将上式代入(10)式，整理后可得

$$J_{\mathrm{MDL}}(p, \vec{\theta}_p) = \frac{k+1}{2}\log\sigma_v^2 + \frac{k+1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{2\sigma_v^2}\vec{\theta}_p^{\mathrm{T}} R_p \vec{\theta}_p + \frac{1}{2}(p+1)\log(k+1) \tag{12}$$

上式是 p 和 $\vec{\theta}_p$ 的函数．下面考虑对固定的 p 值，在对向量 $\vec{\theta}_p$ 加上具有单位欧氏范数的约束下，如何选取 $\vec{\theta}_p$ 使 $J_{\mathrm{MDL}}(p, \vec{\theta}_p)$ 最小化的问题.

在(12)式中与 θ_p 有关的量只有 $\frac{1}{2\sigma_v^2}\vec{\theta}_p^{\mathrm{T}} R_p \vec{\theta}_p$ 一项，因而为了使准则最小化必须使 $\vec{\theta}_p^{\mathrm{T}} R_p \vec{\theta}_p$ 项取最小值．从矩阵代数理论可知，使 $\vec{\theta}_p^{\mathrm{T}} R_p \vec{\theta}_p$ 最小化的 $\vec{\theta}_p$ 就是矩阵 R_p 的最小特征值 $\lambda_{\min}(p)$ 所对应的特征向量 $\vec{\theta}_{\min}(p)$．当选取 $\vec{\theta}_p = \vec{\theta}_{\min}(p)$ 时，可进一步推得如下的关系式

$$\frac{1}{k+1}\theta_{\min}^{\mathrm{T}}(p) R_p \theta_{\min}(p) = \frac{1}{k+1} V_k^{\mathrm{T}} V_k = \frac{1}{k+1}\lambda_{\min}(p) \approx \sigma_v^2 . \tag{13}$$

将上式代入(12)式，舍去所有与 p 和 $\theta_{\min}(p)$ 无关的量，准则函数变为

$$J_{\mathrm{MDL}}(p)=\frac{k+1}{2}\log\lambda_{\min}(p)+\frac{p}{2}\log(k+1) \tag{14}$$

由于 θ_p 被溶合到 $\lambda_{\min}(p)$ 中，故上式不显含 θ_p 项. 在上式两边乘以 $2/(k+1)$，整理后可得

$$\frac{2}{k+1}J_{\mathrm{MDL}}(p)=\log\left[\lambda_{\min}(p)((k+1)^{1/(k+1)})^{p}\right]. \tag{15}$$

因对数函数是单调增函数，根据(15)式可推出一个新的所含信息与 $J_{\mathrm{MDL}}(p)$ 完全相同的准则函数

$$J(p)=\lambda_{\min}(p)((k+1)^{1/(k+1)})^{p}. \tag{16}$$

上面的分析表明：

1）模型结构辨识问题渐近地简化为对不同的 p 值，计算矩阵 R_p 的最小特征值. 由于已有象递推／迭代自共轭特征空间分解算法那样有效的计算特征值的方法[8]，从而使得基于特征值的定阶方法在计算上优于基于预测误差方差的定阶方法.

2）在渐近意义上讲，MDL 准则所能提供的信息量不超过 OIVPM 矩阵 R_p 的最小特征值所提供的信息量，也就是讲 MDL 准则和最小特征值是渐近等价的.

根据以上分析，我们便可依据矩阵 R_p 的最小特征值随 p 值的变化规律来确定模型的阶. 若考虑 J_p 的变化率：

$$J_p=J(p)/J(p-1) \tag{17}$$

则使 J_p 达到最小值时的 p 就是模型阶的最佳估计.

当估计出 AR 部分的阶之后，可利用文献[3,4]中的方法估计 MA 部分的阶. 相对于文献[3]的方法，本文将 ARMA 模型的定阶分两步进行有助于进一步减少计算量. 若模型的阶 p 和 q 均在 10 的范围内，按文献[3]的方法需考虑 100 种组合情形，而按本文的方法只需考虑 20 种情形. 另外，由于利用了辅助变量和超定思想，本文提出的方法还有其它方面的一些优点，在此不一一介绍了.

3　数值仿真

为了估价本文方法确定模型阶的性能，我们进行了大量的仿真实验. 限于篇幅，下面介绍其中的二例.

例 1.　仿真实验数据由文献[3]中的 ARMA(6,4)模型产生

$$\begin{aligned}y_t=&-0.7907y_{t-1}-0.042y_{t-2}+0.5556y_{t-3}\\&+0.0247y_{t-4}-0.3846y_{t-5}-0.3026y_{t-6}+e_t+0.3452e_{t-1}\\&+0.53e_{t-2}+0.3985e_{t-3}+0.8138e_{t-4}+n_t.\end{aligned} \tag{18}$$

其中 n_t 是零均值具有可调方差的高斯白噪声序列，调整它的方差使输出信噪比 $SNR=20\mathrm{dB}$[3].

例 2.　仿真实验数据由下式产生

$$y_t=\sqrt{2}(\sin 0.2\pi t+\sin 0.4\pi t+\sin 0.8\pi t)+e_t. \tag{19}$$

在(18)和(19)式中，e_t 为零均值单位方差高斯白噪声．对例1和例2分别做50次Monto-Carlo试验，在每次试验中均取 $k=40$，按文献[5]中的延时输出选取辅助变量 z_t，对例1和例2分别取 $z_t=y_{t-5}$ 和 $z_t=y_{t-7}$，数据长度分别为 $N=2000$和 $N=1000$．在每次试验中，利用 J_p 估计AR部分阶的同时利用文献[3]中的方法估计MA部分的阶，用AR拟合技术时取 $m=100$．表1和表2分别给出了例1和例2的统计结果，在每次试验中都能准确地确定模型的阶，即例1的阶 $(p, q)=(6, 4)$，例2的阶$(p, q)=(6, 6)$.

表1　例1统计结果

p 或 q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J_p 的均值	0.5815	0.7530	0.9813	0.9808	0.6868	*0.1659	0.9181	0.6290	0.8741	0.8255
J_p 的标准偏差	0.1094	0.1246	0.0148	0.0243	0.1914	0.0808	0.1091	0.1622	0.0857	0.1407
J_q 的均值	0.9759	0.8950	0.7069	*0.4139	0.9722	0.9342	0.9868	0.9832	0.9579	0.8987
J_q 的标准偏差	0.0140	0.0354	0.0372	0.0821	0.0351	0.0460	0.0214	0.0252	0.0554	0.0712

表2　例2统计结果

p 或 q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J_p 的均值	0.8822	0.9189	0.9004	0.7224	0.6308	*0.0021	0.9592	0.9523	0.9698	0.9652
J_p 的标准偏差	0.0509	0.0333	0.0359	0.0645	0.0127	0.0009	0.0502	0.0658	0.0404	0.0491
J_q 的均值	0.7873	0.9096	0.9005	0.9025	0.7387	*0.3082	0.9881	0.9880	0.9901	0.9878
J_q 的标准偏差	0.0216	0.0191	0.0173	0.0205	0.0355	0.0533	0.0169	0.0183	0.0133	0.0194

4　结论

本文基于MDL准则，提出了一种将ARMA模型定阶分两步进行的有效的结构辨识方法．该方法除了具有文献[3]中方法所具有的优点外，由于利用了辅助变量，提高了算法的抗噪能力，同时由于将定阶分两步完成，进一步减少了计算量，是一种在计算上更为有效的方法．另外，由于利用了超定思想，充分利用了高阶样本协方差函数的信息，提高了估计的有效性，使定阶方法具有准确可靠和稳健性．数值仿真结果表明本文提出的定阶方法是一种行之有效的定阶方法.

参　考　文　献

[1] Hannan E J. The estimation of the order of an ARMA process. *Ann. Stat.* 1980, **8**: 1071 — 1081.

[2] Rissanen J. A universal prior for integers and estimation by minimum description length. *Ann. Stat.* 1983, **11**: 416 — 431.

[3] Liang G Wilkes D M and Cadzow J A. ARMA model order estimation based on the eigenvalues of the covariance matrix. *IEEE Trans. Signal Processing*. 1993, **41**(10) 3003 — 3009.

[4] Zhang Xianda and Zhang Yuansheng. Determination of the MA order of an ARMA process using sample correlations. *IEEE Trans. Signal Processing*. 1993, **41** (6): 2277 — 2280.

[5] Söderström T and Storica P. Comparison of some instrumental variable methods-Consistency and accuracy aspects. *Automatica*. 1981, **17**: 101 — 115.

[6] Friedlander B. The square-root overdetermined recursive instrumental variable algorithm. *IEEE Trans.*

Automat. Control. 1989, **34** (6): 656 — 658.

[7] Cadzow J A and Solomon O M. Algebraic approach to system identification. *IEEE Trans. ASSP*. 1988, **34** (3): 492 — 496.

[8] Wilkes D M. The RISE algorithm for recursive eigenspace decomposition, *IEEE Trans. Signal Processing*. 1992, **40** (3): 703 — 707.

ARMA MODEL ORDER DETERMINATION BASED ON THE EIGENVALUES OF THE OVERDETERMINED INSTRUMENTAL VARIABLE PRODUCE MOMENT

XIAO CHUANGBAI　　LUO HUI　　LI YANDA

(*Dept. of Automation, Tsinghua University, Beijing* 100084)

ABSTRACT

Based on the MDL criterion, a computationally efficient method for the order determination of ARMA models is proposed in this paper. Order determination is accomplished in two stages, i.e., the AR order is first determined by the minimum eigenvalue of overdetermined instrumental variable product moment (OIVPM) and the MA order is then estimated by the minimum eigenvalues of a covariance matrix derived from the observed data. The performance of the algorithm is illustrated by extensive numerical examples.

Key words: Autoregressive moving-average model, Structure determination, Minimum description length criterion, Instrumental variable.