

# 基于 $M$ 带小波的动态多尺度系统融合估计

崔培玲<sup>1,2</sup> 王桂增<sup>1</sup> 潘泉<sup>3</sup>

**摘要** 研究一类动态多尺度系统的融合估计方法, 这类系统具有已知的动态系统模型约束, 由具有不同采样率的多个传感器独立观测, 传感器的采样率以  $M(M > 2)$  倍递减. 用  $M$  带小波变换来拟合状态在各尺度空间的投影关系, 建立了满足标准卡尔曼滤波条件的系统模型. 进行卡尔曼滤波后, 可以获得系统状态最优估计值. 仿真结果验证了该动态多尺度系统融合估计算法的有效性.

**关键词**  $M$  带小波, 动态多尺度系统, 估计  
**中图分类号** TP13

## Fusion and Estimation of Dynamic Multiscale System Based on $M$ -Band Wavelet

CUI Pei-Ling<sup>1,2</sup> WANG Gui-Zeng<sup>1</sup> PAN Quan<sup>3</sup>

**Abstract** In this paper, the fusion and estimation algorithm of a class of dynamic multiscale systems is investigated. This system is subject to the known dynamic system model, and is measured by multiple sensors with different sampling rates. The sampling rates decrease by a factor of  $M(M > 2)$ .  $M$ -band wavelet is used to approximate the projection relationship between the scale spaces, and system model that satisfies Kalman filter condition is built. After performing Kalman filter, the optimal state estimation can be obtained. Simulation results are given to obtain insight into the effectiveness of our method.

**Key words**  $M$ -band wavelet, dynamic multiscale system, estimation

## 1 引言

为了提高动态系统的状态估计、目标识别和目标跟踪等方面的性能, 可采用多个不同采样率的传感器对其进行观测, 这类系统被称为动态多尺度系统 (Dynamic multiscale system, DMS). 此时, 观测数据的数据量大并且具有多尺度特征, 传统的数据处理技术和融合手段很难直接应用到这类系统中. 因此, 研究其融合估计方法就成为众多科技工作者努力探索的问题.

在这方面已取得了一些研究成果, 国外主要是以 Willsky<sup>[1]</sup>、Hong<sup>[2]</sup> 为首的研究小组, 国内主要是作者所在课题组进行的大量研究<sup>[3~8]</sup>. 目前, 多尺度估计方法已有效应用于各种大规模静态估计问题, 而在动态多尺度系统融合估计方面的研究成果, 都

是针对一种最简单的情况, 即相邻尺度上传感器之间采样率是 2 倍关系的动态多尺度系统, 采用的是 2 进小波. 对于在实际系统中非常重要且常见的非 2 倍采样率的情况, 目前尚未见报道.

多尺度系统和小波变换所构成的多尺度分析之间, 存在着天然的相似性. 与 2 进小波理论相比,  $M$  带小波理论<sup>[9]</sup>为小波基的选取提供了更广泛的选择余地; 在分解子带数相同条件下,  $M$  带小波变换中信号是按“多通道”进行分解的, 所以按不同频带分解的速度较快, 对高频有更细的频带划分.

对相邻尺度上传感器的采样率之间是  $M$  倍 ( $M > 2$ ) 关系的动态多尺度系统, 本文用  $M$  带小波来拟合状态在各尺度空间的投影关系, 采用扩维的方式将一个时间块内最细尺度的状态节点当作一个向量来处理, 用状态空间投影方程将各尺度的节点连接起来, 从而建立了新的系统模型, 该模型满足卡尔曼滤波条件. 进行卡尔曼滤波后, 可以获得系统状态的最优估计值. 仿真结果验证了该动态多尺度系统融合估计算法的有效性.

## 2 问题描述

$N$  个尺度的动态多尺度系统可表示如下

收稿日期 2005-9-21 收修改稿日期 2006-7-11  
Received September 21, 2005; in revised form July 11, 2006  
国家自然科学基金 (60234010), 中国博士后基金 (2005037353) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60234010) and China Postdoctoral Science Foundation (2005037353)

1. 清华大学自动化系 北京 100084 2. 北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院 北京 100083 3. 西北工业大学自动化学院 西安 710072

1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084 2. School of Instrument Science and Opto-electronics Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083 3. Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072

DOI: 10.1360/aas-007-0021

$$\mathbf{x}_N(M^{N-1}k+1) = A(M^{N-1}k)\mathbf{x}_N(M^{N-1}k) + B(M^{N-1}k)\mathbf{w}(M^{N-1}k) \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_i(M^{i-1}k) = C_i(M^{i-1}k)\mathbf{x}_i(M^{i-1}k) + \mathbf{v}_i(M^{i-1}k) \quad (2)$$

$$i = 1, \dots, N$$

其中,  $i$  表示尺度,  $M^{i-1}k$  是尺度  $i$  上的序列采样时刻, 矢量  $\mathbf{x}_i(M^{i-1}k) \in R^{N_x \times 1}$  是尺度  $i$  上的状态,  $A_N(M^{N-1}k) \in R^{N_x \times N_x}$  和  $B_N(M^{N-1}k) \in R^{N_x \times p}$  分别是系统和输入矩阵. 状态方程只在尺度  $N$  (最细尺度) 上给出(式(1)), 模型误差用一个随机过程  $\mathbf{w}(M^{N-1}k)$  表示, 且

$$E\{\mathbf{w}(M^{N-1}k)\} = 0$$

$$E\{\mathbf{w}(M^{N-1}k)(\mathbf{w}(M^{N-1}k))^T\} = Q(M^{N-1}k)$$

状态变量  $\mathbf{x}_N(M^{N-1}k)$  由  $N$  个传感器在不同尺度上进行观测(式(2)), 尺度  $i$  ( $i = N, \dots, 1$ ) 上有一个传感器在该尺度空间对目标进行观测,  $\mathbf{z}_i(M^{i-1}k) \in R^{N_z \times 1}$ ,  $C_i(M^{i-1}k) \in R^{N_z \times N_x}$ , 其量测误差是  $\mathbf{v}_i(M^{i-1}k)$ , 且

$$E\{\mathbf{v}_i(M^{i-1}k)\} = 0$$

$$E\{\mathbf{v}_i(M^{i-1}k)\mathbf{v}_i(M^{i-1}k)^T\} = R_i(M^{i-1}k)$$

状态矢量  $\mathbf{x}_N(M^{N-1}k)$  的初始值是随机矢量  $\mathbf{x}(0)$ , 其均值和方差矩阵为

$$E\{\mathbf{x}(0)\} = \mathbf{x}_0$$

$$E\{(\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0)^T\} = P_0$$

假设  $\mathbf{x}(0)$ ,  $\mathbf{w}(\cdot)$  和  $\mathbf{v}_i(\cdot)$  相互独立.

本文研究一类动态多尺度系统, 从尺度  $N$  到尺度  $N-1, N-2, \dots, 1$ , 传感器的采样率以  $M$  倍递减. 即在同一时间块内, 若尺度 1 上的传感器有 1 个采样点, 则尺度 2 上的传感器有  $M$  个采样点, 依次类推, 尺度  $N$  上的传感器有  $M^{N-1}$  个采样点. 本文目的是, 通过对多个尺度上传感器信息的融合, 获得系统状态最优估计值.

### 3 $M$ 带小波变换

根据  $M$  带小波变换理论<sup>[9]</sup>, 设尺度函数为  $\phi(t)$ , 对应的小波函数共有  $M-1$  个, 记为  $\Psi^{(m)}(t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M-1$ , 满足

$$\phi(t) = M^{-i/2} \sum_n h(n)\phi(M^{-i}t - k) \quad (3)$$

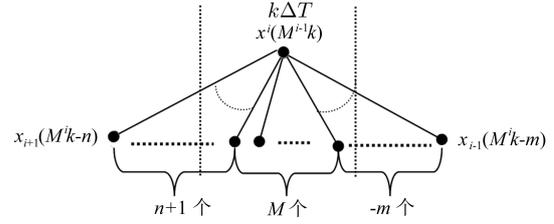


图 1  $k\Delta T$  时间块内两相邻尺度间状态节点关系  
Fig. 1 The state nodes' relation between adjacent scales in  $k\Delta T$  time block

$$\Psi^{(m)}(t) = M^{-i/2} \sum_n g^{(m)}(n)\Psi(M^{-i}t - k) \quad (4)$$

对信号  $f(t) \in L^2(R)$ , 由  $M$  带小波变换的多尺度分析理论,  $f(t)$  的  $M$  带小波变换为

$$D_i^{(m)}f = \langle f(t), \Psi_{i,k}^{(m)}(t) \rangle$$

其中,  $\Psi_{i,k}^{(m)} = M^{-i/2}\Psi^{(m)}(M^{-i}t - k)$ .

$f(t)$  在尺度  $i$  上的尺度信号为  $A_i^d f = \langle f(t), \phi_{i,k}(t) \rangle$ , 其中  $\phi_{i,k} = M^{-i/2}\phi(M^{-i}t - k)$ . 小波分量  $D_i^{(m)}f$  和尺度分量  $A_i^d f$  满足下面的递推公式

$$A_i^d f = M^{-1/2} \sum_n h(k - Mn)A_{i+1}^d f \quad (5)$$

$$D_i^{(m)}f = M^{-1/2} \sum_n g^{(m)}(k - Mn)A_{i+1}^d f \quad (6)$$

对于有限长度的确定性信号序列, 用算子形式描述  $M$  带小波变换更为方便. 考虑在尺度  $i$  上的信号序列  $\mathbf{x}_i(\cdot)$ , 定义状态空间投影方程

$$\mathbf{x}_i = P_i \mathbf{x}_{i+1} \quad (7)$$

其中,  $P_i$  是基于  $M$  带小波从尺度  $i+1$  向尺  $i$  投影时的尺度算子.

### 4 基于 $M$ 带小波的状态空间投影

设  $M$  带小波变换的滤波器长度为  $L$ ,  $L > M$ . 图 1 给出了  $k\Delta T$  时间块内, 尺度  $i$  和尺度  $i+1$  上状态节点的关系, 其中  $n - m + 1 = L$ . 可以看到, 尺度  $i$  上的一个节点与尺度  $i+1$  上的  $L$  个节点有联系. 统一对状态节点的标记, 记尺度  $i$  的节点为  $\mathbf{x}_i(M^{i-1}k)$ , 较细尺度  $i+1$  上与其相联的节点为:  $\mathbf{x}_{i+1}(M^i k - n), \mathbf{x}_{i+1}(M^i k - n + 1), \dots, \mathbf{x}_{i+1}(M^i k), \dots, \mathbf{x}_{i+1}(M^i k - m)$ . 可以看出,  $M$  带小波变换的多尺度结构不构成  $M$  叉树, 相邻时间块  $k\Delta T$  和  $(k+1)\Delta T$  的状态有一部分是重合的. 因此, 式(7)中算子  $P_i$  的计算就比较复杂.

$$T_{N-i}(m_{N-i}) = \left[ \underbrace{O, \dots, O}_{Z_1^{N-i}(m_{N-i})} \underbrace{I \cdot h^{N-i}(n^{N-i}), I \cdot h^{N-i}(n^{N-i} - 1), \dots, I \cdot h^{N-i}(m^{N-i})}_{L^{(N-i)}} \underbrace{O, \dots, O}_{Z_2^{N-i}(m_{N-i})} \right] \quad (12)$$

设  $M$  带小波对应的低通滤波器为  $D_N$ ,  $h(0)$  为其零时刻的脉冲响应, 记

$$D_N = [h(m), h(m+1), \dots, h(0), \dots, h(n)]$$

在时间块  $k\Delta T$ , 尺度  $N-1$  上的状态

$$\mathbf{x}_{N-1}(M^{N-2}k + m_{N-1}) = (D_N * \mathbf{x}_N(\cdot)) \downarrow_M = \sum_{j=m}^n h(j) \mathbf{x}_N(M^{N-1}k + Mm_{N-1} - j)$$

其中,  $*$  表示卷积,  $\downarrow_M$  表示  $M$  次下采样.  $m_{N-1} = 0, 1, \dots, M^{N-2} - 1$ , 下文记  $m_j = 0, 1, \dots, M^{j-1} - 1, j = 1, \dots, N$ . 定义

$$D_{N-i} = [h(m), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M^i}, h(m+1), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M^i}, h(m+2), \dots, h(n-1), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{M^i}, h(n)] \quad (8)$$

即在  $D_N$  的滤波器系数间插入  $M^i$  个零. 因此, 尺度  $N-2$  上的节点可以这样获得: 先把  $D_N$  与  $D_{N-1}$  做卷积, 得到滤波器  $D^{N-2}$ , 再用  $D^{N-2}$  与  $\mathbf{x}_N(\cdot)$  卷积, 最后  $M^2$  次下采样. 同理, 尺度  $N-i$  上的节点可以这样得到: 依次把  $D_N, D_{N-1}, \dots, D_{N-i+1}$  做卷积, 得到滤波器  $D^{N-i}$

$$D^{N-i} = D_N * D_{N-1} * \dots * D_{N-i+1} \quad (9)$$

令  $D^N = [1]$ , 即单位脉冲滤波器. 用  $D^{N-i}$  与  $\mathbf{x}_N(\cdot)$  卷积, 最后  $M^i$  次下采样, 有

$$\mathbf{x}_{N-i}(\cdot) = (D^{N-i} * \mathbf{x}_N(\cdot)) \downarrow_{M^i} \quad (10)$$

可推出滤波器  $D^{N-i}$  的长度为  $L^{(N-i)}$ ,  $L^{(N-i)} = (M^i - 1)(L - 1) + 1$ . 记  $D^{N-i} = [h^{N-i}(m^{N-i}), h^{N-i}(m^{N-i} + 1), \dots, h^{N-i}(n^{N-i})]$ , 其中  $m^{N-i}$ 、 $n^{N-i}$  与  $m$ 、 $n$  的关系为

$$m^{N-i} = (M^i - 1)m, n^{N-i} = (M^i - 1)n$$

根据(10), 节点  $\mathbf{x}_1(k)$  的最细尺度节点组合为

$$\mathbf{x}_1(k) = (D^1 * \mathbf{x}_N(\cdot)) \downarrow_{M^{N-1}} = \sum_{j=m^1}^{n^1} h^1(j) \mathbf{x}_N(M^{N-1}k - j)$$

共需要  $L^{(1)} = (M^{N-1} - 1)(L - 1) + 1$  个尺度  $N$  上的节点, 这也是对  $k\Delta T$  内所有节点拟合所需要的尺度  $N$  上节点的最大数目.

定义

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k) &= \text{col}(\mathbf{x}_N(M^{N-1}k - (M^{N-1} - 1)n), \\ &\mathbf{x}_N(M^{N-1}k - (M^{N-1} - 1)n + 1), \dots, \\ &\mathbf{x}_N(M^{N-1}k - (M^{N-1} - 1)m)) \end{aligned} \quad (11)$$

$\bar{\mathbf{x}}(k)$  中共有  $L^{(1)}$  个最细尺度上的状态. 定义(12)式(见本页上方).

其中,  $I$  为  $N_x \times N_x$  的单位阵,  $O$  为  $N_x \times N_x$  零矩阵,  $Z_1^{N-i}(m_{N-i})$  和  $Z_2^{N-i}(m_{N-i})$  为

$$Z_1^{N-i}(m_{N-i}) = M^i m_{N-i} + n(M^{N-1} - M^i)$$

$$Z_2^{N-i}(m_{N-i}) = m(M^i - M^{N-1}) - M^i m_{N-i}$$

那么, 尺度  $N-i$  上的节点  $\mathbf{x}_{N-i}(M^{N-i-1}k + m_{N-i})$  可表示为

$$\mathbf{x}_{N-i}(M^{N-i-1}k + m_{N-i}) = T_{N-i}(m_{N-i}) \bar{\mathbf{x}}(k) \quad (13)$$

## 5 动态多尺度系统融合估计

### 5.1 观测方程

离散化后尺度  $i$  上的观测方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i(M^{i-1}k + m_i) &= \\ C_i(M^{i-1}k + m_i) \mathbf{x}_i(M^{i-1}k + m_i) \\ &+ \mathbf{v}_i(M^{i-1}k + m_i) \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N$ . 由式(13)可知

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_i(M^{i-1}k + m_i) &= \\ C_i(M^{i-1}k + m_i) T_i(m_i) \bar{\mathbf{x}}(k) &+ \mathbf{v}_i(M^{i-1}k + m_i) \end{aligned}$$

定义

$$\bar{\mathbf{z}}_i(k) = \text{col}(\mathbf{z}_i(M^{i-1}k), \mathbf{z}_i(M^{i-1}k + 1), \dots, \mathbf{z}_i(M^{i-1}(k+1) - 1))$$

$$\bar{C}_i(k) = \text{col}(C_i(M^{i-1}k)T_i(0), C_i(M^{i-1}k + 1)T_i(1), \dots, C_i(M^{i-1}(k+1) - 1)T_i(M^{i-1} - 1))$$

$$\bar{\mathbf{v}}_i(k) = \text{col}(\mathbf{v}_i(M^{i-1}k), \mathbf{v}_i(M^{i-1}k + 1), \dots, \mathbf{v}_i(M^{i-1}(k+1) - 1))$$

其中  $col$  表示将括号内的数据组成列向量, 可推得  $\bar{\mathbf{v}}_i(k)$  的方差阵为

$$\bar{R}_i(k) = \text{diag}[R_i(\cdot), R_i(\cdot), \dots, R_i(\cdot)]$$

则有

$$\bar{\mathbf{z}}_i(k) = \bar{C}_i(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{v}}_i(k) \quad (15)$$

再记

$$\bar{\mathbf{z}}(k) = \text{col}(\bar{\mathbf{z}}_1(k), \bar{\mathbf{z}}_2(k), \dots, \bar{\mathbf{z}}_N(k))$$

$$\bar{C}(k) = \text{col}(\bar{C}_1(k), \bar{C}_2(k), \dots, \bar{C}_N(k))$$

$$\bar{\mathbf{v}}(k) = \text{col}(\bar{\mathbf{v}}_1(k), \bar{\mathbf{v}}_2(k), \dots, \bar{\mathbf{v}}_N(k))$$

则扩维后的观测方程为

$$\bar{\mathbf{z}}(k) = \bar{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{v}}(k) \quad (16)$$

其中白噪声  $\bar{\mathbf{v}}(k)$  的方差为

$$\bar{R}(k) = \text{diag}[\bar{R}_1(k), \bar{R}_2(k), \dots, \bar{R}_N(k)] \quad (17)$$

## 5.2 状态方程

两相邻时间块  $k\Delta T$  和  $(k+1)\Delta T$  的状态向量  $\bar{\mathbf{x}}(k)$  和  $\bar{\mathbf{x}}(k+1)$  有一部分是重合的, 所以状态方程的推导比较复杂.

由式(11)可知,  $\bar{\mathbf{x}}(k)$  的最后一个元素为  $\mathbf{x}_N(M^{N-1}k - (M^{N-1} - 1)m)$ ,  $\bar{\mathbf{x}}(k+1)$  的第一个元素为  $\mathbf{x}_N(M^{N-1}(k+1) - (M^{N-1} - 1)n)$ , 重合部分的长度为  $l1 = M^{N-1} - (M^{N-1} - 1)(n - m)$ , 非重合部分的长度为  $l2 = M^{N-1}$ . 记  $l(k) = M^{N-1}k - (M^{N-1} - 1)m$ , 则  $\bar{\mathbf{x}}(k+1)$  的最后一个元素为  $\mathbf{x}_N(l(k+1))$ ,  $\bar{\mathbf{x}}(k)$  的最后一个元素为  $\mathbf{x}_N(l(k+1) - l2)$ .

对于  $\bar{\mathbf{x}}(k+1)$  中与  $\bar{\mathbf{x}}(k)$  不重合的部分, 由最细尺度上的状态方程可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_N(l(k+1) - l2 + 1 + m_N) = & \\ \prod_{n=0}^{m_1} A(l(k+1) - l2 + m_N - n) \cdot \mathbf{x}_N(l(k+1) - & \\ l2) + \sum_{h=0}^{m_N} \prod_{n=0}^{m_N-h-1} A(l(k+1) - l2 + m_N - n) \cdot & \\ B(l(k+1) - l2 + h)\mathbf{w}(l(k+1) - l2 + h) & \end{aligned}$$

其中  $m_N = 0, 1, \dots, M^{N-1} - 1$ . 令

$$\bar{\mathbf{w}}(k) = \text{col}(\mathbf{w}(l(k+1) - l2), \mathbf{w}(l(k+1) - l2 + 1), \dots, \mathbf{w}(l(k+1) - 1))$$

$$A(k, m_N) = \prod_{n=0}^{m_N} A(l(k+1) - l2 + m_N - n)$$

$$B(k, m_N) =$$

$$\begin{bmatrix} \left( \prod_{n=0}^{m_N-1} A(l(k+1) - l2 + m_N - n) \cdot B(l(k+1) - l2) \right)^T \\ \left( \prod_{n=0}^{m_N-2} A(l(k+1) - l2 + m_N - n) \cdot B(l(k+1) - l2 + 1) \right)^T \\ \vdots \\ (B(l(k+1) - l2 + m_N))^T \\ O \\ \vdots \\ O \end{bmatrix}^T$$

其中,  $\bar{\mathbf{w}}(k)$  为  $M^{N-1}u \times 1$  维单位白噪声序列,  $A(k, m_N)$  为  $N_x \times N_x$  维方阵,  $B(k, m_N)$  为  $N_x \times M^{N-1}u$  维矩阵. 令

$$\underline{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k, 0) \\ A(k, 1) \\ \vdots \\ A(k, M^{N-1} - 1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}(k) = \begin{bmatrix} B(k, 0) \\ B(k, 1) \\ \vdots \\ B(k, M^{N-1} - 1) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{x}}(2, k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N(l(k+1) - l2 + 1) \\ \mathbf{x}_N(l(k+1) - l2 + 2) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(l(k+1)) \end{bmatrix}$$

其中,  $\underline{A}(k)$  为  $l2 \cdot N_x \times N_x$  维矩阵,  $\underline{B}(k)$  为  $l2 \cdot N_x \times M^{N-1}u$  维矩阵,  $\bar{\mathbf{x}}(2, k+1)$  的维数为  $l2 \cdot N_x \times 1$ , 则可将  $\bar{\mathbf{x}}(k+1)$  中与  $\bar{\mathbf{x}}(k)$  不重合的部分  $\bar{\mathbf{x}}(2, k+1)$  写为

$$\bar{\mathbf{x}}(2, k+1) = \begin{bmatrix} O & \underline{A}(k) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \underline{B}(k)\bar{\mathbf{w}}(k)$$

其中  $O$  为相应大小的零矩阵.

令  $f(k+1) = M^{N-1}(k+1) - (M^{N-1} - 1)n$ , 记  $\bar{\mathbf{x}}(k+1)$  中与  $\bar{\mathbf{x}}(k)$  重合的部分为

$$\bar{\mathbf{x}}(1, k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_N(f(k+1)) \\ \mathbf{x}_N(f(k+1) + 1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N(f(k+1) + l1 - 1) \end{bmatrix}$$

令

$$\bar{I} = \text{diag} \left( \underbrace{I, I, \dots, I}_{l-1} \right)$$

则

$$\bar{\mathbf{x}}(1, k+1) = \begin{bmatrix} O & \bar{I} & O \\ O & O & I_{N_x} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + [O_1] \bar{\mathbf{w}}(k)$$

其中  $O_1$  为  $l \cdot N_x \times M^{N-1}u$  维零矩阵. 据上, 可得到状态转移方程

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(1, k+1) \\ \bar{\mathbf{x}}(2, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & \bar{I} & O \\ O & O & I \\ O & O & \underline{A}(k) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(k) + \begin{bmatrix} O_1 \\ \underline{B}(k) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}(k)$$

令

$$\bar{A}(k) = \begin{bmatrix} O & \bar{I} & O \\ O & O & I \\ O & O & \underline{A}(k) \end{bmatrix}, \bar{B}(k) = \begin{bmatrix} O_1 \\ \underline{B}(k) \end{bmatrix}$$

则扩维后的状态方程为

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{A}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{B}(k)\bar{\mathbf{w}}(k) \quad (18)$$

### 5.3 各尺度上的状态最优估计值

把式 (16) 和 (18) 写在一起

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{A}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{B}(k)\bar{\mathbf{w}}(k) \\ \bar{\mathbf{z}}(k) = \bar{C}(k)\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{v}}(k) \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $\bar{\mathbf{w}}(k)$  和  $\bar{\mathbf{v}}(k)$  均为白噪声且不相关, 上述二式构成了一对离散卡尔曼滤波基本方程, 并且满足标准卡尔曼滤波的条件. 执行卡尔曼滤波, 将得到最细尺度上状态  $\bar{\mathbf{x}}(k)$  的线性最小方差估计  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k)$ . 对于其它尺度上的状态节点估计值, 有定理 1, 证明过程可参见文献 [4].

**定理 1.** 如果  $\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k)$  是  $\bar{\mathbf{x}}(k)$  在时间块  $k\Delta T$  的线性最小方差估计, 那么尺度  $i = N-1, N-2, \dots, 1$  上的状态节点  $\mathbf{x}_i(M^{i-1}k + m_i)$  的线性最小方差估计为  $T_i(m_i)\hat{\bar{\mathbf{x}}}(k)$ .

## 6 仿真结果及分析

考虑如下过程

$$\mathbf{x}_2(3k+1) = a\mathbf{x}_2(3k) + b\mathbf{w}(3k)$$

假设系统有两个尺度, 且在两个尺度上都有量测

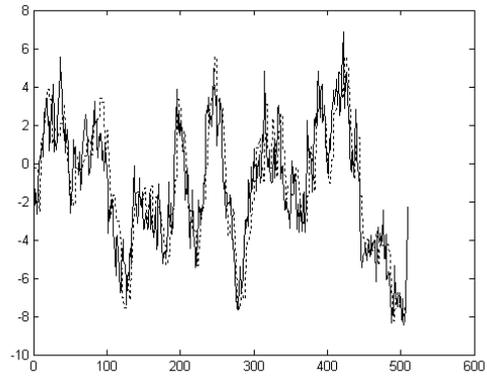
$\mathbf{z}_i(3^{i-1}k + 3^{i-1} - 1) = c_i\mathbf{x}_i(3^{i-1}k + 3^{i-1} - 1) + \mathbf{v}_i(3^{i-1}k + 3^{i-1} - 1); i = 1, 2$   
噪声  $\mathbf{w}(\cdot)$  的方差为  $q$ ,  $\mathbf{v}_1(\cdot)$ 、 $\mathbf{v}_2(\cdot)$  与  $\mathbf{w}(\cdot)$  不相关, 方差分别为  $r_1$  和  $r_2$ .

令  $a = 0.95$ ,  $b = 1$ ,  $c_1 = c_2 = 1$ ,  $q = 1$ ,  $r_1 = 16$ ,  $r_2 = 13$ , 进行了 100 次 Monte Carlo 仿真. 采用 3 带小波, 滤波系数为

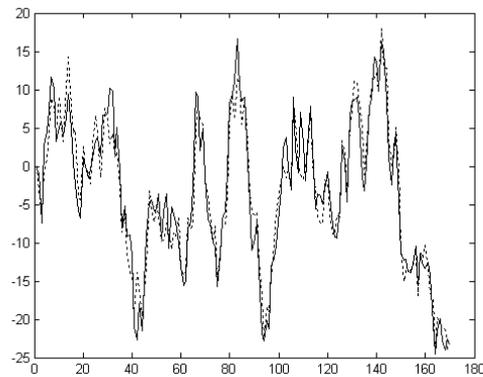
$$h = [0.58610191 \quad 0.91943525 \quad 1.25276858 \\ 0.41389809 \quad 0.08056475 \quad -0.25276857]$$

$$g^{(1)} = [-0.2030296 \quad 0.94280904 \quad -0.03239930 \\ -1.21091061 \quad -0.23570226 \quad 0.73950609]$$

$$g^{(2)} = [0.69911956 \quad -1.08866211 \quad 0.79779083 \\ -0.69911956 \quad -0.13608276 \quad 0.42695404]$$



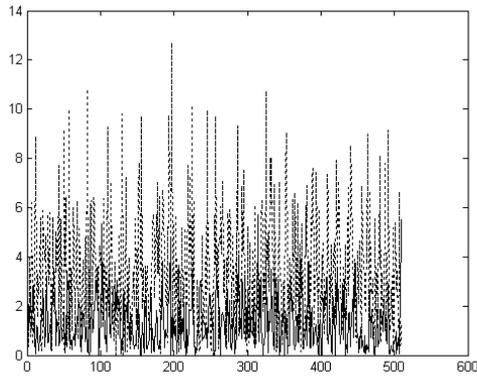
(a) 尺度 2  
(Scale 2)



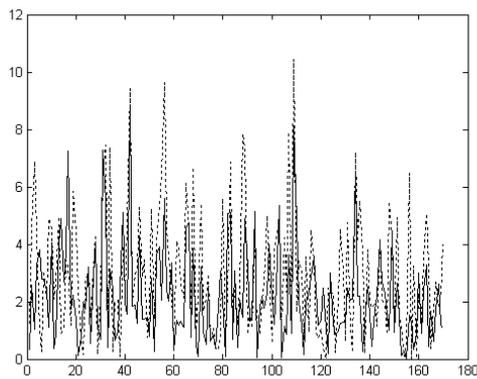
(b) 尺度 1  
(Scale 1)

图 2 信号真值(实线)与估计值(虚线)

Fig. 2 Real value (solid) and estimated value (dotted)



(a) 尺度 2  
(Scale 2)



(b) 尺度 1  
(Scale 1)

图 3 量测噪声的均方根(虚线)与估计误差的均方根(实线)  
Fig. 3 Measurement noise RMS (dotted) and estimation error RMS (solid)

图 2 是尺度 1 和尺度 2 上的信号真值与估计值的比较, 图 3 是尺度 1 和尺度 2 上量测噪声的均方根 (Root-mean-square, RMS) 和估计误差的均方根的比较. 尺度 2 上的噪声压缩比是 7.6dB, 尺度 1 上的噪声压缩比是 2.4dB.

从图 2 可以看出, 尺度 2 和尺度 1 上的信号真值与估计值非常接近. 由图 3 可以看出, 尺度 1 和尺度 2 上的估计误差的均方根比量测噪声的均方根小.

图 4 给出了尺度 2 上直接进行卡尔曼滤波的估计误差均方根与本文算法的估计误差均方根, 可以看出, 前者比后者大. 分析原因如下:

1) 本文算法是基于多个尺度上的观测信息进行融合估计的, 而在最细尺度上直接进行卡尔曼滤波时, 仅基于最细尺度上的观测信息.

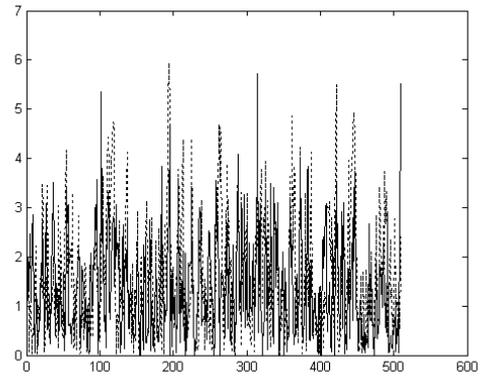


图 4 尺度 2 上直接进行卡尔曼滤波的估计误差均方根(虚线)与本文算法的估计误差均方根(实线)

Fig. 4 Estimation error RMS at scale 2 obtained by performing Kalman filter directly (dotted) and by the algorithm in this paper (solid)

2) 本文在推导时, 是按时间块进行递推的, 而标准卡尔曼滤波是以一个时间节拍递推的. 两者相比, 前者在计算时相当于进行了一定的平滑.

3) 本文是基于  $M$  带小波进行的, 相邻两个时间块的状态节点有重合. 当  $(k+1)\Delta T$  时间块的观测值到来后, 对重合的那部分状态的估计进行了一定的平滑.

## 7 结论

本文研究了一类动态多尺度系统的最优融合估计, 这类系统由具有不同采样率的多个传感器所独立观测. 对于这类动态多尺度系统, 不能直接应用卡尔曼滤波作为最优估计. 为此, 通过  $M$  带小波变换来拟合状态空间的投影关系, 引入状态空间投影方程来联系各个尺度, 将系统归结为满足卡尔曼滤波条件的状态空间模型. 可以对该模型直接实施卡尔曼滤波, 给出了各尺度上状态的最优估计值. 根据卡尔曼滤波的性质, 可知估计是线性最小方差意义下最优的. 仿真结果验证了所提出的融合估计算法的有效性.

本文算法是对整个时间块进行估计, 从实时性角度来讲, 不如传统的卡尔曼滤波器. 估计效果方面, 仿真结果已表明, 最细尺度上的融合估计结果比直接进行卡尔曼滤波的效果好. 限于篇幅原因, 另文研究进行精度比较的定理分析.

当然, 还有一些问题需要继续研究. 例如, 由于将所有尺度上的观测信息进行了扩维, 那么随着系统尺度的增加, 本文算法的计算量会增加. 针对这一问题, 可以用序贯卡尔曼滤波算法来减小计算量.

## References

- 1 Frakt A B, Willsky A S. Computationally efficient stochastic realization for internal multiscale autoregressive models. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2001, **12**(2): 109~142
- 2 Hong L, Cong S, Wicker D. Multirate interacting multiple model (MRIMM) filtering with out-of-sequence GMTI data. *IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation*, 2003, **150**(5): 333~343
- 3 Cui P L, Pan Q, Wang G Z, Cui J F. Multiresolutional filtering of a class of dynamic multiscale system subject to colored state equation noise. *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2005, **3560**: 218~227
- 4 Pan Quan, Zhang Lei, Cui Pei-Ling, Zhang Hong-Cai. The optimal filtering of a class of dynamic multiscale systems. *Science in China (Series E)*, 2004, **34**(4): 433~447  
(潘泉, 张磊, 崔培玲, 张洪才. 一类动态多尺度系统的最优滤波. 中国科学 E 辑. 2004, **34**(4): 433~447)
- 5 Pan Quan, Cui Pei-Ling, Zhang Lei, Zhang Hong-Cai. Modeling and estimation of a class of dynamic multiscale systems by general compactly supported wavelet. *Acta Automatica Sinica*, 2005, **31**(3): 385~393  
(潘泉, 崔培玲, 张磊, 张洪才. 基于一般支撑小波的一类动态多尺度系统最优估计算法. 自动化学报, 2005, **31**(3): 385~393)
- 6 Cui Pei-Ling. Research on the Filtering Algorithms of a Class of Dynamic Multiscale System. [Ph.D. dissertation], Northwestern Polytechnic University, Xi'an, 2004  
(崔培玲. 一类动态多尺度系统的滤波方法研究. 西安: 西北工业大学博士学位论文, 2004)
- 7 Cui P L, Pan Q, Zhang H C, Li J H. Modeling and estimation of a class of dynamic multiscale system subject to colored noise. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Piscataway, USA: IEEE, 2004. **2**: 913~916
- 8 Wen Cheng-Lin, Zhou Dong-Hua. *Multiscale Estimation Theory and Its Application*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002, 127~182

(文成林, 周东华. 多尺度估计理论及其应用. 北京: 清华大学出版社, 2002)

- 9 Heller P N. Rank  $M$  wavelets with  $N$  vanishing moments. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1995, **16**: 502~519



崔培玲 清华大学博士后, 研究方向为动态多尺度系统估计和小波理论. 本文通信作者. E-mail: ljhcpl@263.net  
(CUI Pei-Ling Postdoctor of Tsinghua University. Her current research interests include multiscale estimation of dynamic system and wavelet theory. Corresponding author of this paper.)



王桂增 清华大学教授, 研究方向为故障诊断. E-mail: wgz@tsinghua.edu.cn  
(WANG Gui-Zeng Professor of Tsinghua University. His current research interests include fault diagnosis, etc.)



潘泉 西北工业大学教授, 研究方向为动态多尺度系统估计和信息融合. E-mail: quanpan@nwpu.edu.cn  
(PAN Quan Professor of Northwestern Polytechnical University. His current research interests include dynamic multiscale system estimation and information fusion.)