第19卷 第4期 自 动 化 学 报 Vol. 19, No. 4
1993年7月 ACTA AUTOMATICA SINICA July, 1993

文矩

广义预估控制的稳定性研究

郑海涛 袁璞
（北京石油大学机电系 100083）

摘 要

本文给出了广义预估控制（GPC）在单值算法下的两个稳定性定理及其证明，为该算法稳定地控制实际工业对象，提供了依据.

关键词：GPC，稳定性，单值算法.

一、引 言

广义预估控制是 Clarke[1] 提出的一种新型预估控制算法. 这一算法将预估控制与自校正技术结合起来，表现出优良的鲁棒性，并有广泛适用范围，因而深受控制界的重视. 但由于算法的复杂性，使这一算法的研究工作增加了难度. 关于参数的整定规则，到目前为止，还没有明确的可供工程理论指导的结论，这对 GPC 的推广应用是很不利的.

本文给出了 GPC 闭环稳定的一个必要条件、三个充分条件，揭示了预估步数 J 与闭环稳定性之间的关系，为 GPC 的参数整定及工程应用提供了依据.

本文采用的是单值 GPC 算法[2].

二、定理及证明

定理1. 对于稳定的被控对象，假设稳态值 $G_p(1)\neq 0$，则不论模型是否准确，GPC 闭环稳定的必要条件是

$$\beta=\frac{a(J)}{G_p(1)}>0. \tag{1}$$

证明. 由文献[2]，GPC 闭环特征方程为

$$\Delta A_p(z^{-1})R(z^{-1})+z^{-1}F_j(z^{-1})B_p(z^{-1})=0, \tag{2}$$

其中 $j=J$

$\Delta=1-z^{-1}$,

$R(z^{-1})=z^{j-1}[E_j(z^{-1})B_m(z^{-1})-a(1)-\cdots-a(j-1)z^{-j+2}]$

本文于1991年6月3日收到.

$$= a(j) + g_{jj}z^{-1} + \cdots, \tag{3}$$

$a(j)$ 为模型阶跃响应第 j 步采样时刻值.

$E_j(z^{-1}),F_j(z^{-1})$ 由递推丢番图方程

$$1 = E_j(z^{-1})A_m(z^{-1})\Delta + z^{-j}F_j(z^{-1}) \tag{4}$$

求得. 对象、模型传递函数分别为

$$G_p(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B_p(z^{-1})}{A_p(z^{-1})} = \sum_{i=1}^{\infty} h^*(i)z^{-i}, \tag{5}$$

$$G_m(z^{-1}) = \frac{z^{-1}B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} = \sum_{i=1}^{\infty} h(i)z^{-i}, \tag{6}$$

$h^*(i)$、$h(i)$ 分别为被控对象、模型的脉冲响应第 i 步采样时刻值.

已知被控对象稳定,因而 GPC 闭环特征方程(1)同下面的方程在稳定性上等效:

$$(1 - z^{-1})R(z^{-1}) + F_j(z^{-1})G_p(z^{-1}) = 0, \tag{7}$$

因而,特征多项式为

$$P(z^{-1}) = (1 - z^{-1})R(z^{-1}) + F_j(z^{-1})G_p(z^{-1}). \tag{8}$$

令 $q = z^{-1}$,则

$$P(q) = (1 - q)R(q) + F_j(q)G_p(q). \tag{9}$$

由(3),(5),(9)式得

$$P(0) = a(j). \tag{10}$$

由(4),(9)式得

$$P(1) = G_p(1). \tag{11}$$

由于 $P(q)$ 在[0,1]上是 q 的连续函数,因而假若(1)式不成立,即

$$\beta = \frac{a(J)}{G_p(1)} \leqslant 0,$$

则必定存在一个 $q, 0 \leqslant q \leqslant 1$, 使 $P(q) = 0$, 即闭环系统存在单位圆外或圆周上的极点,闭环系统不稳定. 因而(1)式为闭环系统稳定的必要条件.

定理 2 假设被控对象稳定且模型准确无差, 则当预估步数 J 选足够大时, GPC 闭环必稳定.

证明. 由(3),(4),(6)式得

$$\Delta R(z^{-1}) + F_j(z^{-1})G_m(z^{-1}) = a(j) + \sum_{i=1}^{\infty} h(j+i)z^{-i} \tag{12}$$

模型准确,被控对象稳定,由(8),(12)式得特征多项式

$$P(z^{-1}) = a(j) + \sum_{i=1}^{\infty} h(j+i)z^{-i}, \tag{13}$$

Jury[3] 指出,对多项式

$$P(z^{-1}) = a_n + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_0z^{-n},$$

如果

$$(1) \quad |a_n| > \sum_{i=1}^{n} |a_{n-i}|,$$

或

$$(2)\ a_n > a_{n-1} > a_{n-2} > \cdots > a_0$$

成立，则 $P(z^{-1})$ 的根皆在单位圆内.

对于(13)式，当预估步数 j 选足够大时，$h(j+i)=0$，因而

$$|a(j)| > \sum_{i=1}^{\infty} |h(j+i)|,$$

即 GPC 闭环极点皆在单位圆内，GPC 闭环稳定.

推论. 在定理 2 条件下，若满足下列条件之一，则 GPC 闭环系统必稳定.

(1) 被控对象阶跃响应单调，且

$$\beta = \frac{a(j)}{G_m(1)} > 0.5. \tag{14}$$

$$(2)\ a(j) > h(j+1) > h(j+2) > \cdots > h(\infty). \tag{15}$$

三、讨　　论

1) 定理 1 给出了 GPC 系统闭环稳定的必要条件，成为选择预估步数必须满足的一个条件. GPC 采用的都是近似模型，模型又是在线校正的，因而 $a(J)$ 需在线计算. 对于复杂对象，在某一时刻 $a(J)$ 同 $G_p(1)$ 同号，而在另一时刻 $a(J)$ 就可能与 $G_p(1)$ 符号相反，此时系统不稳定，因而，预估步数 J 需在线整定. 定理 1 就为预估步数 J 的在线整定提供了依据.

2) $G_p(1)$ 是被控对象阶跃响应的稳态值，一般难以准确得到，但定理 1 的使用并不要求 $G_p(1)$ 的值，而只需知 $G_p(1)$ 的符号即可. 定理 1 也不要求模型准确，它适用于模型任意失配下的情况，因而非常便于工程应用.

3) 本文定义了一个稳定性指标 β（预估水平）. 单值 GPC 待整定的参数只有一个 β，因而参数整定简单. 预估步数 J 是通过 β 间接整定的.

4) 定理 2 及其推论给出了系统稳定的充分条件，指出增大预估水平 β，可使系统的稳定裕度增大. 定理 1、定理 2 及推论为参数 J 的整定提供了指南.

四、应 用 实 例

例 1. 某实际生产过程，测得 $G_p(1)=1.02$，GPC 模型在 $t \leqslant 2\text{Ts}$ 和 $t \geqslant 160\text{Ts}$ 时刻阶跃响应见图 1.

由定理 1 知，在 $t \leqslant 2\text{TS}$ 时刻，$j=1$或2系统不稳定，应选 $J \geqslant 3$. 但在 $t \geqslant 160\text{Ts}$ 时刻，由于模型发生了变化，此时 $J<7$，闭环不稳定，应增大 J，使 $J \geqslant 7$.

例 2. 对非最小相位系统

$$G(s) = \frac{(1-9s)}{(15s+1)(3s+1)}.$$

取 $Ts=3$，离散化后阶跃响应系数见表 1（模型准确）.

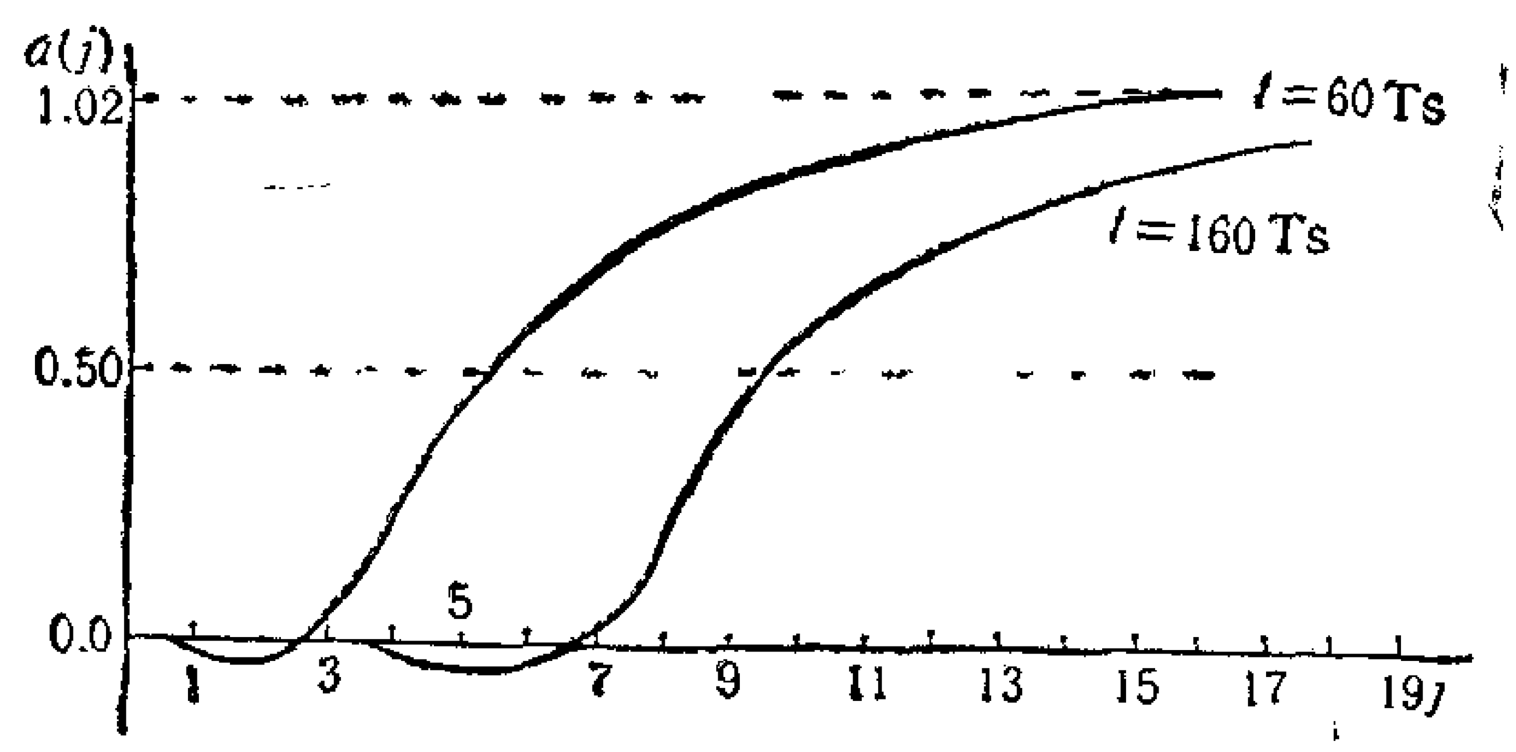

图 1

表 1

j	1	2	3	4	5	6	7	>60
$a(j)$	−0.27	−.205	−.048	.120	.271	.400	.508	1.00
$h(j)$	−0.27	−.065	−.157	.168	.151	.129	.108	0.00

由定理 1,为使闭环稳定,必须 $J \geqslant 4$. 由定理 2 及推论(1), $J > 7$ 闭环系统稳定.由定理 2 及推论(2), $J \geqslant 5$ 闭环系统稳定. 实验表明, $J = 5$ ($\beta = 0.27$) 即可得到满意的控制效果.

本文提供的稳定性定理及推论,为在线或离线整定预估步数 J,提高 GPC 算法的稳定性,提供了一定的理论依据和方法.

参 考 文 献

[1] Clarke, D. W. et. al, Generalized Predictive Control, *Automatica* **23**(1987), (2), 137—160.

[2] 郑海涛、袁璞,基于 CARIMA 模型的单值预估控制,工业过程模型化及控制 IV, 4(1992)75—81 华南理工大学出版社.

[3] Jury, E. J., Theory and Application of the Z-Transform Method, New York, Wiley & Sons, 1964.

STABILITY OF GENERALIZED PREDICTIVE CONTROL

ZHENG HAITAO YUAN PU

(University of Petroleum, Beijing)

ABSTRACT

Two theorems regarding the stability problem of the Generalized Predictive Control (GPC) with single prediction algorithm are introduced which provides guidance for the design of the indnstrial process controller.

Key words: GPC; stability.