



# 关于系统相似性的研究

高立群 张嗣瀛

(东北大学自控系 沈阳 110006)

**关键词:** 系统相似, 反馈状态解耦, 反馈相似化.

## 1 相似系统

相似是反映系统结构的一个重要特征, 但目前国内外关于系统相似的研究却几乎空白, 本文针对非线性控制系统提出如下定义.

**定义** 对于分别定义在  $n$  维光滑流形  $N$  和  $M$  上的两个光滑系统

$$S'_1: \dot{z}_1 = f_1(z_1, u'_1), \quad z_1 \in N, \quad u'_1 \in R^m,$$

$$y'_1 = h(z_1), \quad y'_1 \in R^r,$$

$$S_2: \dot{x}_2 = f_2(x_2, u_2), \quad x_2 \in M, \quad u_2 \in R^m,$$

$$y_2 = h_2(x_2), \quad y_2 \in R^r.$$

1) 如果存在同胚映射  $T: N \rightarrow M, Tz_1 = x_1; Q: R^m \rightarrow R^m, Qu'_1 = u_1$ , 使得  $S'_1$  映为

$$S_1: \dot{x}_1 = f_1(x_1, u_1) = \varphi(x_1, u_1)f_2(x_1, u_1),$$

$$y_1 = h_1(x_1).$$

在  $x_0 \in M$  的邻域  $O(x_0)$  内对于  $\forall u_1 \in R^m$  有  $\varphi(x_1, u_1) \in C^\infty(O(x_0))$ ; 当  $f_2(x_0, u_1) \neq 0$  时,  $\varphi(x_0, u_1) \neq 0, |\varphi(x_0, u_1)| < \infty$ , 则称系统  $S_1$  与  $S_2$  在  $x_0 \in M$  处状态相似, 记作  $S_1 \underset{s}{\overset{x_0}{\sim}} S_2$ ; 也称系统  $S'_1$  在  $z_0 = T^{-1}x_0 \in N$  处与系统  $S_2$  在  $x_0$  处状态相似. 若对

$\forall x \in M, S_1 \underset{s}{\overset{x}{\sim}} S_2$ , 则称  $S_1(S'_1)$  状态相似于  $S_2$ , 记作  $S_1(S'_1) \underset{s}{\sim} S_2$ .

2) 如果  $S_1 \underset{s}{\overset{x_0}{\sim}} S_2$ , 且在  $O(x_0)$  内

$$Sp\{dh_1^i | i = 1, \dots, r\} = Sp\{dh_2^i | i = 1, \dots, r\},$$

则称  $S_1$  与  $S_2$  在  $x_0 \in M$  处相似, 记作  $S_1 \underset{s}{\overset{x_0}{\sim}} S_2$ ; 也称  $S'_1$  在  $z_0 = T^{-1}x_0 \in N$  处与  $S_2$  在  $x_0$  处相似. 若对  $\forall x \in M, S_1 \sim S_2$ , 则称  $S_1(S'_1)$  相似于  $S_2$ , 记作  $S_1(S'_1) \sim S_2$ .

系统状态相似和相似均是等价关系。一个复杂的系统可以和一个相应比较简单的系统相似。如果能寻找出相似系统在各性质之间的内在联系, 将有可能把较为复杂的系统的研究转化为简单系统的研究。

定义中状态相似系统具有鲜明的几何意义: 设:  $S_1$  和  $S_2$  分别描述流形  $M$  上的两个运动体系, 如果  $S_1 \overset{x}{\sim}_s S_2$ , 那么当  $u_1 = u_2$  时, 在  $x_0$  点处两个运动的速度方向相同。

为讨论问题方便, 并不失一般性, 在后面我们认为两个相似系统定义在同一流形  $M$  上。

## 2 主要结果

下面涉及的概念均引自文献 [1, 2]。

**命题 1** 如果  $S_1 \overset{x_0}{\sim}_s S_2$ , 且  $\varphi(x, u) = \varphi(x)$ , 则  $S_1$  和  $S_2$  在  $x_0$  处具有相同的弱能控性和强可接近性。

**命题 2** 设  $S_1 \overset{x_0}{\sim}_s S_2$ , 则在  $x_0$  处  $S_1$  弱可观测等价于  $S_2$  弱可观测。

命题 1, 2 可根据定义和熟知的有关定理直接加以验证。

根据前面的定义, 两个相似的仿射非线性系统可进一步表述为

$$S_3: \dot{x}_1 = \varphi(x_1)f_2(x_1) + \sum_{j=1}^m g_j(x_1)u_1^j,$$

$$y_1 = h_1(x_1),$$

$$S_4: \dot{x}_2 = f_2(x_2) + \sum_{j=1}^m g_j(x_2)u_2^j,$$

$$y_2 = h_2(x_2).$$

其中,  $x_1, x_2 \in M$ ,  $u_i = [u_i^1, \dots, u_i^m]^T \in R^m$ ,  $y_i \in R^r$ ,  $i = 1, 2$ ;  $h_1, h_2, \varphi, g_j \in C^\infty(M)$ 。

**命题 3** 设  $x_0$  为  $S_3$  和  $S_4$  的非奇异点, 记  $G = Sp\{g_j | j = 1, \dots, m\}$ , 则  $S_3$  在  $x_0$  处存在反馈状态解耦的充要条件为  $S_4$  在  $x_0$  处存在反馈状态解耦。

证. 设  $S_4$  在  $x_0$  处可以反馈状态解耦, 则存在  $K$  个同时可积的弱  $(f, g)$  不变分布  $\Delta_1, \dots, \Delta_k$

$$G = G \cap \Delta_1 + \dots + G \cap \Delta_k.$$

可验证  $\Delta_i$  关于  $S_3$  也是弱  $(f, g)$  不变的, 从而得证。

**命题 4** 设  $S_3$  和  $S_4$  在  $x_0$  点非奇异,  $Lg_j\varphi(x) = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ , 则  $S_3$  在  $O(x_0)$  内可状态方程反馈线性化的充要条件为  $S_4$  在  $O(x_0)$  内可状态方程反馈线性化。

证. 设  $S_4$  在  $O(x_0)$  内可状态方程反馈线性化, 则存在一族在  $x_0$  点非奇异的对合分布

$$D_i = Sp\{ad_{f_2}^s g_j | j = 1, \dots, m, s \leq i - 1\}, i = 1, \dots, n,$$

$$\dim D_n(x_0) = n.$$

令  $\bar{D}_i = Sp\{ad_{\varphi f_2}^s g_j | j = 1, \dots, m, s \leq i - 1\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , 则利用归纳法可以证得

$\bar{D}_i = D_i, i = 1, \dots, n, x \in O(x_0)$ . 从而  $S_3$  也可以依分布  $D_i$  进行状态方程线性化.

**命题 5** 对于  $M$  上的两个仿射非线性系统

$$S_5: \dot{x}_1 = f_1(x_1) + \sum_{j=1}^m g_1^j(x_1)u_1^j,$$

$$S_6: \dot{x}_2 = f_2(x_2) + \sum_{j=1}^m g_2^j(x_2)u_2^j.$$

如果在  $O(x_0)$  内

$$S_p\{g_1^j | j = 1, \dots, m\} = S_p\{g_2^j | j = 1, \dots, m\},$$

且

$$f_2(x) \in S_p\{f_1, g_1^j | j = 1, \dots, m\}, f_2(x) \notin S_p\{g_1^j | j = 1, \dots, m\},$$

或

$$f_1(x) \in S_p\{f_2, g_2^j | j = 1, \dots, m\}, f_1(x) \notin S_p\{g_2^j | j = 1, \dots, m\},$$

则  $S_5$  和  $S_6$  可反馈状态相似化.

此命题可通过选取反馈进行构造性证明.

### 参 考 文 献

- [1] 程代展. 非线性系统的几何理论. 科学出版社, 1988.  
 [2] Isidori A. Nonlinear control systems. Springer-Verlag World Publishing Corp., 1989

## RESEARCH ON SIMILAR OF SYSTEMS

GAO LIQUN      ZHANG SIYING

(Dept. of Automatic Control, Northeastern Univ., Shenyang 110006)

**Key words:** Similarity of systems, decomposition of state equation with feedback, similarization with state feedback.