广义不确定周期时变系统的鲁棒稳定性分析[1)]

苏晓明[1,2] 吕明珠[1]
[1](沈阳工业大学理学院 沈阳 110023)
[2](东北大学理学院 沈阳 110004)
(E-mail: suxm@sut.edu.cn)

摘 要 研究广义不确定周期时变系统的鲁棒稳定性问题. 基于广义周期时变系统 Lyapunov 不等式，提出了广义不确定周期时变系统鲁棒稳定的概念，采用矩阵不等式 (LMI) 方法，得到了该类系统鲁棒稳定的充分必要条件；然后，进一步研究了在状态反馈控制下保证闭环系统鲁棒稳定的条件，给出了一族状态反馈鲁棒稳定器的设计方法；最后，引入了广义周期时变系统二次稳定的概念，并讨论了二次稳定性与鲁棒稳定性之间的关系.

关键词 广义不确定周期时变系统，鲁棒稳定性，矩阵不等式，状态反馈鲁棒控制器，二次稳定性
中图分类号 TP13

Analysis of Robust Stability for Linear Time-varying Uncertain Periodic Descriptor Systems

SU Xiao-Ming[1,2] LV Ming-Zhu[1]
[1](*College of Science, Shengyang University of Technology, Shengyang* 110023)
[2](*College of Science, Northeastern University, Shengyang* 110023)
(E-mail: suxm@sut.edu.cn)

Abstract In this paper, the problems of robust stability for linear time-varying uncertain periodic descriptor systems are treated. Based on the results of Lyapunov inequality of linear time-varying periodic descriptor systems, the definition of robust stability is put forward, and by using linear matrix inequalities, a necessary and sufficient condition is obtained for the systems to be robustly stable. Then, the condition that the close-loop system under state feedback control is robustly stable is considered and a kind of state feedback robust controllers is presented. Finally, the definition of quadratic stability is introduced, and the relation between quadratic stability and robust stability of the systems is discussed.

Key words Linear time-varying uncertain periodic descriptor systems, robust stability, linear matrix inequalities, state feedback robust controllers, quadratic stability

1) 辽宁省科学技术基金 (20041024), 辽宁省教育厅基金 (202062042) 资助
Supported by Science and Technology Foundation of Liaoning Province (20041024), Foundation of Educational Office of Liaoning Province (202062042)
收稿日期 2005-7-6 收修改稿日期 2006-2-22
Received July 6, 2005; in revised form February 22, 2006

1 引言

鲁棒控制是当今控制理论的一个研究热点，它是针对控制系统中的不确定性而提出来的．所谓鲁棒控制，是指受控系统存在内部不确定性和 (或) 外部干扰的情况下，设计静态或动态的反馈控制器，使闭环系统满足预定的某项或某几项性能指标．由于在实际的工程控制问题中，受控系统本身的不确定性 (由建模误差，降维误差，运行误差等因素引起) 以及外界不确定性 (诸如不可知干扰输入、环境噪声等) 经常是不可避免的．因此，对鲁棒控制问题的研究具有重要的实际意义．

自 Rosenbrock[1] 于 1974 年首次提出广义系统的概念以来，广义系统理论的研究已经取得了长足的发展，许多有关正常系统的结论被推广到广义系统中去，而对鲁棒控制问题的研究方法也是多种多样的．Fang[2] 讨论了广义不确定系统的鲁棒稳定性及鲁棒控制问题，利用模矩阵的有关性质，得到了使所考虑系统鲁棒稳定的摄动的最大上界，并在此基础上，给出了鲁棒控制的有关结论．Huang[3] 针对具有一般的结构不确定广义系统，利用矩阵测度的概念，得到了系统鲁棒稳定的充分条件．随着进一步的研究，Xie[4] 首次引入了“二次稳定 ” 这一概念，并研究了参数不确定系统二次稳定的各种等价条件．申铁龙 [5] 采用 H_∞ 控制方法将复杂的鲁棒控制问题归结为求解 Riccati 方程的问题，简化了鲁棒控制的设计过程．当 Lyapunov 方法日益成为稳定性研究的重要工具时，张庆灵 [6] 利用广义线性系统的 Lyapunov 方程和 Riccati 方程研究系统的鲁棒稳定性分析与综合问题．此后，杨冬梅 [7] 基于矩阵不等式方法给出了一类参数不确定性广义系统的鲁棒稳定性判据．在广义时变系统的研究方面，Bittati[8] 初步分析了广义时变周期系统的稳定性，Campell[9] 给出了广义时变系统能控能观的判定条件，而苏晓明 [10] 运用 Lyapunov 不等式研究了广义时变周期系统的允许性，并得到了系统允许的充分必要条件．但相对于广义定常系统来说，这些成果还不够成熟，尤其在鲁棒稳定及镇定方面的研究还很少．

本文基于以往的研究成果，采用矩阵不等式方法，研究了广义周期时变系统的鲁棒稳定性问题，得到了系统鲁棒稳定的充分必要条件，并给出了保证闭环系统鲁棒稳定的状态反馈镇定器的设计方法，最后讨论了二次稳定性与鲁棒稳定性的关系．所得的结果符合实际，且比较简单．

2 鲁棒稳定性分析及鲁棒镇定控制器的设计方法

2.1 问题的提出

不失一般性，考虑如下参数不确定性广义周期时变系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A(t)+\Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t) \tag{1}$$

这里，$\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 是系统的状态变量，$A(t)$ 是适当维数的解析的 T 周期函数矩阵，E 为定常矩阵，且 $\mathrm{rank}(E(t))=q\leqslant n$, $\Delta A(t)$ 为具有适当维数的不确定矩阵，且具有如下形式

$$\Delta A(t)=D(t)F(t)M(t) \tag{2}$$

其中，$D(t)$ 和 $M(t)$ 为适当维数的解析的 T 周期函数矩阵，$F(t)$ 是具有 Lebeque 可测元的不确定实矩阵，且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I$$

定义 1. 系统 (1) 称为允许的，如果它是正则、稳定、无脉冲的.

定义 2. 如果系统 (1) 对给定的不确定性 $\Delta A(t)$ 都是允许的，则称系统 (1) 是鲁棒稳定的.

当 $\Delta A(t)=0$ 时，系统 (1) 为

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=A(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{3}$$

称为系统 (1) 的标称系统.

2.2　鲁棒稳定性

引理 1[10]**.** 设广义周期系统 (3) 解析可解，则系统 (2) 是允许的充要条件是 Lyapunov 不等式

$$\begin{cases} A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+E^{\mathrm{T}}\dot{V}(t)<0 \\ E^{\mathrm{T}}V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E\geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

有解.

显然，由引理 1 知，若系统 (1) 是鲁棒稳定的，则如下 Lyapunov 不等式有解

$$\begin{cases} (A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\Delta A(t))+E^{\mathrm{T}}\dot{V}(t)<0 \\ E^{\mathrm{T}}V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E\geqslant 0 \end{cases} \tag{5}$$

引理 2[7]**.** 对于任意的 $x\in R^n$, 有

$$\max\{(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}MF(t)N\boldsymbol{x})^2|F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I\}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}MM^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{x})$$

其中, M 和 N 是具有适当维数的实矩阵.

引理 3[7]**.** 设矩阵 $M,N,P\in R^{n\times n}$, 满足 $M\geqslant 0,N\geqslant 0$ 和 $P<0$, 如果对于任意的非零向量 $\boldsymbol{x}\in R^n$, 有

$$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x})^2-4(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}M\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{x})>0$$

则存在常数 $\lambda>0$, 使得下式成立

$$\lambda^2M+\lambda P+N<0$$

对于上述形式的参数不确定广义周期时变系统 (1), 有下面的鲁棒稳定性判据

定理 1. 系统 (1) 为鲁棒稳定的充分必要条件是存在可逆矩阵 $V(t)\in R^{n\times n}$, 及常数 $\varepsilon>0$. 满足线性矩阵不等式 (LMI)

$$\begin{bmatrix} E\dot{V}(t)+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t) & \varepsilon^{-1}V^{\mathrm{T}}(t)D(t) & \varepsilon M^{\mathrm{T}}(t) \\ \varepsilon^{-1}D^{\mathrm{T}}(t)V(t) & -I & 0 \\ \varepsilon M(t) & 0 & -I \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$E^{\mathrm{T}}V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E\geqslant 0$$

证明. 式 (6) 等价于存在可逆矩阵 $V(t)$ 及常数 $\varepsilon>0$, 使得下式成立

$$\begin{aligned} &E\dot{V}+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\varepsilon^{-2}V^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\varepsilon^2M^{\mathrm{T}}(t)M(t)<0 \\ &E^{\mathrm{T}}V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E\geqslant 0 \end{aligned}$$

充分性 设存在可逆矩阵 $V(t)$ 及常数 $\varepsilon > 0$, 满足上式，则对于所有允许的不确定性 $\Delta A(t)$, 有

$$\begin{aligned}&E\dot{V}(t)+(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\Delta A(t))=\\&E\dot{V}(t)+(A(t)+D(t)F(t)M(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+D(t)F(t)M(t))=\\&E\dot{V}(t)+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+M^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}(t)D^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)D(t)F(t)M(t)\leqslant\\&E\dot{V}(t)+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\varepsilon^{-2}V^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\varepsilon^{2}M^{\mathrm{T}}(t)M(t)\end{aligned}$$

于是，由引理 1, 得

$$\begin{cases}(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\Delta A(t))+E^{\mathrm{T}}\dot{V}(t)<0\\E^{\mathrm{T}}V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E\geqslant 0\end{cases}$$

则系统 (1) 是鲁棒稳定的.

必要性 设系统 (1) 是鲁棒稳定的，则对于所有允许的不确定性 $\Delta A(t)$, 存在可逆矩阵 $V(t)$ 满足 (5), 即

$$E\dot{V}(t)+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+M^{\mathrm{T}}(t)F^{\mathrm{T}}(t)D^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)D(t)F(t)M(t)<0$$

令 $P=E\dot{V}+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)$, 则对于任意的非零向量 $x\in R^{n}$, 可得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}<-2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}(t)D(t)F(t)M(t)\boldsymbol{x}$$

则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}<-2\max\{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}(t)D(t)F(t)M(t)x|F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I\}\leqslant 0$$

于是

$$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x})^2>4\max\{(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}(t)D(t)F(t)M(t)\boldsymbol{x})^2|F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant I\}$$

由引理 2

$$(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x})^2>4(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)V(t)\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}(t)M(t)\boldsymbol{x})$$

由引理 3, 存在常数 $\lambda>0$, 使得

$$M^{\mathrm{T}}(t)M(t)+\lambda P+\lambda^2V^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)V(t)<0$$

对上式两端同除以 λ, 且令 $\lambda=\varepsilon^{-2}$, 得

$$E\dot{V}(t)+A^{\mathrm{T}}(t)V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)A(t)+\varepsilon^{-2}V^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)V(t)+\varepsilon^{2}M^{\mathrm{T}}(t)M(t)<0$$

再由 Schur 补引理，即得式 (6). □

2.3 鲁棒镇定方法

在前面鲁棒稳定性分析的基础上，下面将进一步讨论保证闭环系统是允许的状态反馈鲁棒镇定控制器的设计方法.

考虑如下不确定广义周期时变系统

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t)=[A(t)+\Delta A(t)]\boldsymbol{x}(t)+[B(t)+\Delta B(t)]\boldsymbol{u}(t)\tag{7}$$

其中，$\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ 为具有适当维数的不确定矩阵，且具有如下形式

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] = D(t)F(t)[M_1(t) \quad M_2(t)]$$

这里，矩阵 $D(t), M_1(t), M_2(t)$ 和 $F(t)$ 的意义同上所述，且 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$.

当 $\Delta A(t) = 0$, $\Delta B(t) = 0$ 时，系统 (8) 成为

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + B(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{8}$$

称系统 (9) 为标称系统.

考虑状态反馈

$$\boldsymbol{u}(t) = K(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{9}$$

则它与系统 (9) 构成的闭环系统为

$$E\dot{\boldsymbol{x}}(t) = [A_c(t) + \Delta A_c(t)]\boldsymbol{x}(t) \tag{10}$$

其中，$A_c(t) = A(t) + B(t)K(t)$, $\Delta A_c(t) = \Delta A(t) + \Delta B(t)K(t)$.

对于系统 (8), 设计一个状态反馈 (9), 使闭环系统 (10) 是鲁棒稳定的，相应的控制器称为鲁棒镇定器.

下面给出状态反馈鲁棒镇定器的设计方法：

定理 2. 如果存在可逆矩阵 $V(t) \in R^{n\times n}$ 及常数 $\varepsilon > 0$, 满足线性矩阵不等式 (为书写方便，这里省略时间变量，但各矩阵仍是时变的)

$$\begin{bmatrix} V^{\mathrm{T}}E\dot{V}^{-1}V + AV + V^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} - B(I+\varepsilon^2 M_2^{\mathrm{T}}M_2)^{-1}B^{\mathrm{T}} & \sqrt{2}\varepsilon^{-1}D & \varepsilon V^{\mathrm{T}}M_1^{\mathrm{T}} \\ \sqrt{2}\varepsilon^{-1}D^{\mathrm{T}} & -I & 0 \\ \varepsilon M_1 V & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

则存在反馈控制器 (9) 使闭环系统是鲁棒稳定的.

若上述条件成立，则所求的一个状态反馈鲁棒镇定器为

$$K(t) = -(I + \varepsilon^2 M_2^{\mathrm{T}}(t)M_2(t))^{-1}B^{\mathrm{T}}(t)V^{-1}(t) \tag{12}$$

证明. 假设存在可逆矩阵 $V(t)$ 及常数 $\varepsilon > 0$, 满足式 (11), 且 $K(t)$ 由式 (12) 给出，记

$$Y(t) = \begin{bmatrix} V^{-1}(t) & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

对式 (11) 分别左乘矩阵 $Y^{\mathrm{T}}(t)$ 和右乘矩阵 $Y(t)$, 且令 $\boldsymbol{x}(t) = V^{-1}(t)$, 得

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} E\dot{X} + A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}A - X^{\mathrm{T}}B(I+\varepsilon^2 M_2^{\mathrm{T}}M_2)^{-1}B^{\mathrm{T}}X & \sqrt{2}\varepsilon^{-1}X^{\mathrm{T}}D & \varepsilon M_1^{\mathrm{T}} \\ \sqrt{2}\varepsilon^{-1}D^{\mathrm{T}}X & -I & 0 \\ \varepsilon M_1 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ &E^{\mathrm{T}}X = X^{\mathrm{T}}E \geqslant 0 \end{aligned} \tag{13}$$

令

$$\hat{Q} = E\dot{X}(t) + A^{\mathrm{T}}(t)X(t) + X^{\mathrm{T}}(t)A(t) + 2\varepsilon^{-2}X^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)X(t) + \varepsilon^2 M_1^{\mathrm{T}}(t)M_1(t) -$$

$$X^{\mathrm{T}}(t)B(t)(I+\varepsilon^2 M_2^{\mathrm{T}}(t)M_2(t))^{-1}B^{\mathrm{T}}X(t)<0 \tag{14}$$

又由于

$$\Delta A_c(t)=\Delta A(t)+\Delta B(t)K(t)=[D(t)\quad D(t)]\begin{bmatrix}F(t) & 0\\ 0 & F(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1(t)\\ M_2(t)K(t)\end{bmatrix}=\bar{D}(t)\bar{F}(t)\bar{M}(t)$$

其中，$\bar{D}(t)=[D(t)\quad D(t)]$, $\bar{F}(t)=\begin{bmatrix}F(t) & 0\\ 0 & F(t)\end{bmatrix}$, $\bar{M}(t)=\begin{bmatrix}M_1(t)\\ M_2(t)K(t)\end{bmatrix}$. 因为 $F^{\mathrm{T}}F(t)\leqslant I$, 则有 $\bar{F}^{\mathrm{T}}(t)\bar{F}(t)\leqslant I$, 于是

$$\begin{aligned}Q=&E\dot{X}(t)+A_c^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X^{\mathrm{T}}(t)A_c(t)+\varepsilon^{-2}X^{\mathrm{T}}(t)\bar{D}(t)\bar{D}^{\mathrm{T}}(t)X(t)+\varepsilon^2\bar{M}^{\mathrm{T}}(t)\bar{M}(t)=\\ &E\dot{X}(t)+A^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X^{\mathrm{T}}(t)A(t)+K^{\mathrm{T}}(t)B^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X^{\mathrm{T}}(t)B(t)K(t)+\\ &2\varepsilon^{-2}X^{\mathrm{T}}(t)D(t)D^{\mathrm{T}}(t)X(t)+\varepsilon^2 M_1^{\mathrm{T}}(t)M_1(t)+\varepsilon^2K^{\mathrm{T}}(t)M_2^{\mathrm{T}}(t)M_2(t)K(t)\end{aligned} \tag{15}$$

将 $K(t)$ 的表达式代入，整理得

$$Q+K^{\mathrm{T}}(t)K(t)=\hat{Q}$$

由式 (14) 及式 (15) 得，$Q<0$, 即

$$E\dot{X}(t)+A_c^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X^{\mathrm{T}}(t)A_c(t)+\varepsilon^{-2}X^{\mathrm{T}}(t)\bar{D}(t)\bar{D}^{\mathrm{T}}(t)X(t)+\varepsilon^2\bar{M}^{\mathrm{T}}(t)\bar{M}(t)<0$$

再由 Schur 补引理，得

$$\begin{bmatrix}E\dot{X}(t)+A_c^{\mathrm{T}}(t)X(t)+X^{\mathrm{T}}(t)A_c(t) & \varepsilon^{-1}X^{\mathrm{T}}(t)\bar{D}(T) & \varepsilon\bar{M}^{\mathrm{T}}(t)\\ \varepsilon^{-1}\bar{D}^{\mathrm{T}}(t)X(t) & -I & 0\\ \varepsilon\bar{M}(t) & 0 & -I\end{bmatrix}<0$$

由定理 1 知，闭环系统 (10) 是鲁棒稳定的. □

2.4 二次稳定性

下面，我们将介绍不确定广义周期时变系统的二次稳定性概念，并讨论二次稳定性与鲁棒稳定性的关系.

对于系统 (1), 其不确定性 $\Delta A(t)$ 具有式 (2) 的结构，取如下广义 Lyapunov 函数

$$V(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}V(t)\boldsymbol{x} \tag{16}$$

其中，$V(t)\in R^{n\times n}$, 上式对 t 求导，得

$$\dot{V}(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\{E\dot{V}(t)+[A(t)+\Delta A(t)]^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)[A(t)+\Delta A(t)]\}\boldsymbol{x} \tag{17}$$

定义 3. 对于系统 (1), 若存在矩阵 $V(t)\in R^{n\times n}$ 和正定矩阵 $W(t)\in R^{n\times n}$, 使得系统 (1) 满足

$$\begin{cases}E^{\mathrm{T}}\dot{V}(t)+(A(t)+\Delta A(t))^{\mathrm{T}}V(t)+V^{\mathrm{T}}(t)(A(t)+\Delta A(t))\leqslant -W(t)\\ E^{\mathrm{T}}V(t)=V^{\mathrm{T}}(t)E\geqslant 0\end{cases} \tag{18}$$

则称系统 (1) 是二次稳定的.

定理 3. 对于系统 (1), 其不确定性 $\Delta A(t)$ 具有式 (2) 的结构，则系统 (1) 二次稳定的充分必要条件是该系统为鲁棒稳定的.

证明. **必要性** 由定义 3 可知，若系统 (1) 二次稳定，则存在矩阵 $V(t)\in R^{n\times n}$ 和正定矩阵 $W(t)\in R^{n\times n}$, 使式 (18) 成立，得

$$E\dot{V}(t)+[A(t)+\Delta A(t)]^{\rm T}V(t)+V^{\rm T}(t)[A(t)+\Delta A(t)]\leqslant -W(t)<0$$

即系统是鲁棒稳定的.

充分性 设系统 (1) 是鲁棒稳定的，由定理 1, 存在可逆矩阵 $V(t)$, 满足如下不等式

$$\begin{aligned}&E\dot{V}(t)+A^{\rm T}(t)V(t)+V^{\rm T}(t)A(t)+V^{\rm T}(t)D(t)D^{\rm T}(t)V(t)+M^{\rm T}(t)M(t)<0\\&E^{\rm T}V(t)=V^{\rm T}(t)E\geqslant 0\end{aligned}\tag{19}$$

由于

$$\begin{aligned}&E\dot{V}(t)+(A(t)+\Delta A(t))^{\rm T}V(t)+V^{\rm T}(t)(A(t)+\Delta A(t))=\\&E\dot{V}(t)+(A(t)+D(t)F(t)M(t))^{\rm T}V(t)+V^{\rm T}(t)(A(t)+D(t)F(t)M(t))=\\&E\dot{V}(t)+A^{\rm T}(t)V(t)+V^{\rm T}(t)A(t)+M^{\rm T}(t)F^{\rm T}(t)D^{\rm T}(t)V(t)+V^{\rm T}(t)D(t)F(t)M(t)\leqslant\\&E\dot{V}(t)+A^{\rm T}V(t)+V^{\rm T}(t)A(t)+V^{\rm T}(t)D(t)D^{\rm T}(t)V(t)+M^{\rm T}(t)M(t)\end{aligned}$$

令 $W(t)=-(E\dot{V}(t)+A^{\rm T}(t)V(t)+V^{\rm T}(t)A(t)+V^{\rm T}(t)D(t)D^{\rm T}(t)V(t)+M^{\rm T}(t)M(t))$.

由式 (19) 得 $W(t)>0$, 于是有

$$\begin{cases}E^{\rm T}\dot{V}(t)+(A(t)+\Delta A(t))^{\rm T}V(t)+V^{\rm T}(t)(A(t)+\Delta A(t))\leqslant -W(t)\\E^{\rm T}V(t)=V^{\rm T}(t)E\geqslant 0\end{cases}$$

成立，则系统 (1) 是二次稳定的.　□

2.5　数值算例

例 在系统 (1) 中，取周期 $T=10$, 且当 $1\leqslant t\leqslant 11$ 时，各系数矩阵的表达式如下

$$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},A(t)=\begin{bmatrix}-t&0\\0&t\end{bmatrix},B(t)=\begin{bmatrix}-t\\t\end{bmatrix},D(t)=\begin{bmatrix}0.1t\\-0.5t\end{bmatrix},M_1(t)=[-0.05t\quad 0.1t],M_2(t)=0.1t$$

取 $\varepsilon=1$, 计算得

$$V(t)=\begin{bmatrix}e^t&0\\0&-t\end{bmatrix}$$

满足线性矩阵不等式 (12), 得控制器增益

$$K(t)=\frac{1}{1+0.01t^2}[te^{-t}\quad 1]$$

使得闭环系统是鲁棒稳定的.

3　结束语

本文利用矩阵不等式方法研究了广义不确定周期时变系统鲁棒稳定的充分必要条件，并给出了一族状态反馈鲁棒稳定器的设计方法，得到的结果是广义定常系统相应结论向广义时变系统的自然推广，具有重要的理论意义.

References

1 Rosenbrock H H. Structural properties of linear dynamical systems. *International Journal of Control*, 1974, **20**(2): 191~202

2 Fang C, Chang F. Analysis of stability robustness for generalized state-space systems with structured perturbations. *Systems and Control Letters*, 1993, **21**(2): 109~114

3 Huang S, Ren W. New results on the robust bounds of linear uncertain systems. *International Journal of Systems Science*, 1997, **28**(2): 141~144

4 Xie L, Souza C E D. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, **37**(5): 1188~1191

5 Shen T L. H_∞ Control Theory and Application. Beijing: Tsinghua Publication House, 1996

6 Zhang Q L and Xu X H. Robust control for descriptor systems. In: Proceedings of 33rd IEEE Conference on Decision and Control. USA, New York: Qxford University Press, 1994. 2981~2982

7 Yang D M. Descriptor Systems. Beijing: Science Publication House, 2003

8 Bittati S. 30 years of periodic control-form analysis to design. In: Proceedings of the Third Asian Control Conference. Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press, 2000. 1253~1258

9 Campell S L, Terrel W J. Observability for linear time-varying descriptor system. *SIAM Matrix Analysis Application*, 1991, **12**(4): 484~496

10 Su X M. Analysis of stabilization and admissibility for periodically time-varying descriptor systems. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulse Systems*, 2005, **12**: 238~250

苏晓明 沈阳工业大学教授，博士．研究方向为广义区间系统，广义周期系统，广义时变系统和鲁棒控制．

(**SU Xiao-Ming** Professor at Shenyang University of Technology, Ph. D. His research interests include singular interval system, singular periodic system singular time-varying system, and robust control.)

吕明珠 沈阳工业大学在读硕士研究生．研究方向为广义周期系统的稳定性和鲁棒控制．

(**LV Ming-Zhu** Graduate student at Shenyang University of Technology. Her research interests include the theory and application of singular periodic system.)