第24卷 第6期 自 动 化 学 报 Vol. 24, No. 6
1998年11月 ACTA AUTOMATICA SINICA Nov., 1998

短 文

关于 Lurie 型控制系统的鲁棒绝对稳定性

杨 斌 潘德惠
(东北大学信息科学与工程学院 沈阳 110006)

摘 要 用 Lyapunov 函数法研究了区间 Lurie 型间接控制系统与直接控制系统的鲁棒绝对稳定性,给出了系统鲁棒绝对稳定的充分条件. 一个应用实例说明该方法的优越性。

关键词 控制系统,区间矩阵,绝对稳定性.

1 引言与引理

在自动控制理论中,Lurie 型控制系统的稳定性问题受到了国内外许多学者的重视,并对其进行了广泛地研究,得到许多较好的结果[2-5]. 这些结果都是基于参数确定的系统模型,而在实际中系统模型往往是参数不确定的. 由于不确定系统讨论的复杂性,目前关于 Lurie 型控制系统的鲁棒绝对稳定性问题研究较少[6,7]. 文[8,9]利用 Popov 准则给出了 Lurie 型控制系统鲁棒绝对稳定的充分条件,但是结果不宜应用. 文[1]研究了区间 Lurie 型控制系统的鲁棒绝对稳定性问题,由于限制条件较强得到的鲁棒度较小. 本文用 Lyapunov 函数法给出了系统鲁棒绝对稳定的充分条件,扩大了文[1]所得的鲁棒度,并且应用本文的结果只需验算有限个行列式的值,从而避免了文[1]要估计矩阵特征值的繁琐手续.

本文研究 Lurie 型间接控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = N[G,H]\boldsymbol{x} + N[R,S]f(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \rho f(\sigma), \quad f(\sigma) \in F[0,\infty) \tag{1}$$

和直接控制系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = N[G,H]\boldsymbol{x} + N[R,S]f(\sigma), \quad \dot{\sigma} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \quad f(\sigma) \in F[0,\infty) \tag{2}$$

的鲁棒绝对稳定性. 这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$; $N[G,H]$为 $n\times n$ 阶区间矩阵, $G=(g_{ij})_{n\times n}$, $H=(h_{ij})_{n\times n}$; $N[R,S]$为 $n\times 1$阶区间矩阵, $R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^{\mathrm{T}}$, $S=(s_1,s_2,\cdots,s_n)^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^{\mathrm{T}}$; $F[0,\infty)=\{f(\sigma)\,|\,f(0)=0, 0<\sigma f(\sigma)<\infty, \sigma\neq 0\}$. 同时考虑系统

$$\dot{\boldsymbol{x}}= A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma), \dot{\sigma} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - \rho f(\sigma), f(\sigma) \in F[0,\infty), \tag{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}= A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}f(\sigma), \dot{\sigma} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \ f(\sigma) \in F[0,\infty), \tag{4}$$

其中 $A\in N[G,H]$, $\boldsymbol{b}\in N[R,S]$.

定义. 若对任意 $A\in N[G,H]$, $\boldsymbol{b}\in N[R,S]$, $f(\sigma)\in F[0,\infty)$, 系统(3),(4)是全局渐近稳定的,则称系统(1),(2)是鲁棒绝对稳定的.

收稿日期 1996-11-11

引理1. 设 $U(t_1,t_2,\cdots,t_s)$ 是 $r\times r$ 阶对称矩阵且它的每个元素都是 $t_i(i=1,2,\cdots,s)$ 的线性函数，则 $U(t_1,t_2,\cdots,t_s)>0\ (t_i\in[T_{i1},T_{i2}])$ 的充要条件为 $U(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)>0\ (\alpha_i=T_{i1},T_{i2})$.

证明. 必要性显然，下面用归纳法证明充分性.

当 $s=1$ 时，任取 r 维向量 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_r)^{\mathrm{T}}$ 且 $\boldsymbol{y}\neq 0$，因为 $U(\alpha_1)>0$，$(\alpha_1=T_{11},T_{12})$，所以 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U(\alpha_1)\boldsymbol{y}>0$；又因为 $U(t_1)$ 的每个元素都是 t_1 的线性函数，故 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U(t_1)\boldsymbol{y}$ 也是 t_1 的线性函数，因此得 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U(t_1)\boldsymbol{y}\geq\min\{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U(T_{11})\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U(T_{12})\boldsymbol{y}\}>0,t_1\in[T_{11},T_{12}]$，则有 $U(t_1)>0,t_1\in[T_{11},T_{12}]$. 故当 $s=1$ 时结论成立.

假设 $s=k$ 时结论成立，下证当 $s=k+1$ 时结论也成立. 为了证明充分性，设 $U(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1})>0\quad(\alpha_i=T_{i1},T_{i2};i=1,2,\cdots,k+1)$ 成立，要证明 $U(t_1,t_2,\cdots,t_k,t_{k+1})>0,t_i\in[T_{i1},T_{i2}](i=1,2,\cdots,k,k+1)$. 事实上，因为 $U(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,t_{k+1})(\alpha_i=T_{i1},T_{i2};i=1,2,\cdots,k)$ 中的各元素是 t_{k+1} 的线性函数，所以

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,t_{k+1})\boldsymbol{y}\geq\min\{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,T_{k+11})\boldsymbol{y},$$
$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}U(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,T_{k+12})\boldsymbol{y}\}>0,$$

故有 $U(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,t_{k+1})>0,t_{k+1}\in[T_{k+11},T_{k+12}]$；又因为 $U(t_1,t_2,\cdots,t_k,t_{k+1})$ 中的各元素是 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ 的线性函数，由归纳法可知，当 $U(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,t_{k+1})>0(\alpha_i=T_{i1},T_{i2};i=1,2,\cdots,k)$ 时，有 $U(t_1,t_2,\cdots,t_k,t_{k+1})>0,t_i\in[T_{i1},T_{i2}]\ (i=1,2,\cdots,k,k+1)$，即引理的结论成立.

2　间接控制系统的鲁棒绝对稳定性

设 $A_0=\frac{1}{2}(G+H),\Delta A=A-A_0,\boldsymbol{b}_0=\frac{1}{2}(R+S),\Delta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_0$，记 $K=(k_{ij})_{n\times n}=\frac{1}{2}(H-G),L=(l_i)_{n\times 1}=\frac{1}{2}(S-R)$，则系统(3)可写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=(A_0+\Delta A)\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{b}_0+\Delta\boldsymbol{b})f(\sigma),\dot{\sigma}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\rho f(\sigma),f(\sigma)\in F[0,\infty).\tag{5}$$

假设 A_0 稳定，取系统(5)的 Lyapunov 函数为

$$V(\boldsymbol{x},\sigma)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}+\int_0^\sigma f(\sigma)\mathrm{d}\sigma,\tag{6}$$

其中 $P>0$ 是 Lyapunov 方程 $A_0^{\mathrm{T}}P+PA_0=-W$ 的唯一解，而 $W>0$ 是某一给定矩阵. 计算得

$$-\dot{V}(\boldsymbol{x},\sigma)|_{(5)}=\begin{bmatrix}f\\\boldsymbol{x}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\rho & (\boldsymbol{d}+\Delta\boldsymbol{d})^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{d}+\Delta\boldsymbol{d}) & W+\Delta W\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f\\\boldsymbol{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f\\\boldsymbol{x}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}Q_1\begin{bmatrix}f\\\boldsymbol{x}\end{bmatrix},\tag{7}$$

这里 $\boldsymbol{d}=-(P\boldsymbol{b}_0+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}),\Delta\boldsymbol{d}=P\Delta\boldsymbol{b},-\Delta W=\Delta A^{\mathrm{T}}P+P\Delta A$. $-\dot{V}(\boldsymbol{x},\sigma)|_{(5)}>0$ 的充要条件为 $Q_1>0$；又因为 Q_1 的每个元素是 Δa_{ij} 与 Δb_i 的线性函数且 $|\Delta a_{ij}|\leq|k_{ij}|,|\Delta b_i|\leq|l_i|\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，由引理1可知，$Q_1>0$ 的充要条件为 $Q_1(\alpha_{ij},\beta_i)>0\ (\alpha_{ij}=-k_{ij},k_{ij};\quad\beta_i=-l_i,l_i;i,j=1,2,\cdots,n)$，则有以下定理.

定理1. 若 $Q_1(\alpha_{ij},\beta_i)>0(\alpha_{ij}=-k_{ij},k_{ij};\beta_i=-l_i,\quad l_i;i,j=1,2,\cdots,n)$，则系统(1)是鲁棒绝对稳定的.

3 直接控制系统的鲁棒绝对稳定性

与第2部分的假设相同,系统(4)可写为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (A_0 + \Delta A)\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{b}_0 + \Delta \boldsymbol{b})f(\sigma), \sigma = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, f(\sigma) \in F[0,\infty). \tag{8}$$

取系统(8)的 Lyapunov 函数为

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x} + \int_0^{\sigma} f(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \tag{9}$$

则

$$-\dot{V}(\boldsymbol{x})|_{(8)} = \begin{bmatrix} f \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} r + \Delta r & (\boldsymbol{d} + \Delta \boldsymbol{d})^{\mathrm{T}} \\ (\boldsymbol{d} + \Delta \boldsymbol{d}) & W + \Delta W^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} Q_2 \begin{bmatrix} f \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

这里 $r = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_0, \Delta r = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d} = -(P\boldsymbol{b}_0 + \frac{1}{2}A_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}), \Delta\boldsymbol{d} = -(P\Delta\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\Delta A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}), -\Delta W = \Delta A^{\mathrm{T}}P + P\Delta A$. 由文[4]得 $-\dot{V}(\boldsymbol{x})|_{(8)} > 0$ 的充要条件为

1) $W + \Delta W > 0$, (11a)

2) $-\det \left[\begin{array}{c:cc} 0 & 0 & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \\ \hdashline 0 & & \\ \boldsymbol{c} & & Q_2 \end{array}\right] = -\det\overline{Q}_2 \geq 0, |\Delta a_{ij}| \leq |k_{ij}|, |\Delta b_i| \leq |l_i|, (i,j = 1,2,\cdots,n).$

(11b)

由引理1知(11a)式成立的充要条件为

$$W + \Delta W(\alpha_{ij}) > 0 \quad (\alpha_{ij} = -k_{ij}, k_{ij}; \quad i,j = 1,2,\cdots,n). \tag{12}$$

下面证明在(12)式成立的情况下,(11b)式成立的充要条件为

$$-\det\overline{Q}_2(\alpha_{ij},\beta_i) \geq 0 \quad (\alpha_{ij} = -k_{ij}, k_{ij}; \beta_i = -l_i, l_i; \quad i,j = 1,2,\cdots,n). \tag{13}$$

事实上,必要性显然成立,只证充分性. 这是因为当 $\sigma = x_1$ 时, $\det\overline{Q}_2 = -\det Q_2^2$(这里 Q_2^2 为 Q_2 去掉第2行第2列所得的矩阵),所以 $-\det\overline{Q}_2 \geq 0$ 的充要条件为 $\det Q_2^2 \geq 0$. 由(13)式知 $\det Q_2^2(\alpha_{ij},\beta_i) \geq 0$,再由(12)式成立可得 $Q_2^2(\alpha_{ij},\beta_i) \geq 0$. 由引理1知 $Q_2^2 \geq 0$,故 $\det Q_2^2 \geq 0$,即得 $-\det\overline{Q}_2 \geq 0$. 当 $\sigma \neq x_1$ 时,可以通过非异线性变换同样可以证明结论成立. 则可得如下定理.

定理2. 系统(2)鲁棒绝对稳定的充分条件为

1) $W + \Delta W(\alpha_{ij}) > 0$, (14a)

2) $-\det\overline{Q}_2(\alpha_{ij},\beta_i) \geq 0 \quad (\alpha_{ij} = -k_{ij}, k_{ij}; \quad \beta_i = -l_i, l_i; \quad i,j = 1,2,\cdots,n).$ (14b)

注. 本文的定理1与定理2是由 $\dot{V} < 0$ 的充要条件得到的,而文[1]的结果是由 $\dot{V} < 0$ 的充分条件得出的. 由于采用了相同的 V 函数,故本文的结果包含了文[1]的结果.

4 应用举例

考虑直接系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-1.3, -0.7] & [-0.3, 0.3] \\ [-0.3, 0.3] & [-1.3, -0.7] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [-1.3, -0.7] \\ [-1.3, -0.7] \end{bmatrix} f(\sigma), \tag{15a}$$

$$\sigma = x_1 + x_2, \tag{15b}$$

这里 $\boldsymbol{c}=[1,1]^{\mathrm{T}}$,$A_0=-I$,$\boldsymbol{b}_0=[-1,-1]^{\mathrm{T}}$. 取 $P=I$,经过简单的计算可得,当 $\alpha_{ij}=-0.3$, 0.3;$\beta_i=-0.3,0.3$ $(i,j=1,2)$时,

$$W+\Delta W(\alpha_{ij})>0,\ -\det\overline{Q}_2(\alpha_{ij},\beta_i)\geq\det\begin{bmatrix}1.4 & 1.2\\ 1.2 & 1.4\end{bmatrix}>0.$$

由定理2可知系统(15)是鲁棒绝对稳定的,并且系统的鲁棒度为0.3,而用文[1]方法得到的鲁棒度仅为0.1.

参 考 文 献

1 年晓红. Lurie 型控制系统的鲁棒绝对稳定性. 控制理论与应用,1995,**12**(5):641—645

2 赵素霞. 关于直接控制系统的绝对稳定性. 数学学报,1979,**22**(4):404—409

3 Grujic L T. On the absolute stability and the Aizerman conjecture. *Automatica*, 1981, **17**(2):335—349

4 Wu Yongxian, Zhao Suxia. Absolute stability of control systems with several nonlinear stationary elements in the case of an infinite sector. *Autom. i Telemekh*, 1991, **52**(1):34—42(in Russian)

5 Xiong K Q. Necessaary and sufficient conditions for the existence of a G-type Lyapunov function. *Automatica*, 1995, **31**(5):787—791

6 高为炳. 非线性控制系统导论. 北京:科学出版社,1991. 145—598

7 舒仲周. 运动稳定性. 成都:西南交通大学出版社,1989. 333—338

8 Grujic L T. Robust absolutely stable Lurie systems. *Int. J. Control*, 1987, **46**(1):357—368

9 Tesi A, Vicino A. Robust absolute stability of Lurie control systems in parameter space. *Automatica*, 1991, **27**(1):147—151

ON THE ROBUST STABILITY OF LURIE CONTROL SYSTEMS

YANG BIN PAN DEHUI

(Department of Automatic Control, Northeastern University, Shenyang 110006)

Abstract In this paper, Lyapunov function method is used to study the robust stability of interval Lurie indirect control system and direct control system. Sufficient conditions for robust stability of the systems are given. An example shows the superiority of this method.

Key words Lurie control system, interval matrix, absolute stability.