第25卷 第6期　　自 动 化 学 报　　Vol. 25, No. 6
1999年11月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　Nov., 1999

研究简报

关于 H^∞ 代数 Riccati 方程可解性的频率判据和解的 Yakubovich 算法[1)]

陈阳舟
（北京工业大学自动化系　北京　100022）

刘家琦
（哈尔滨工业大学航天学院　哈尔滨　150001）

陈善本
（哈尔滨工业大学焊接国家重点实验室　哈尔滨　150001）

关键词　H^∞ 代数 Riccati 方程，半正定镇定解，频率判据，Yakubovich 算法.

ON H^∞ ALGEBRAIC RICCATI EQUATION: FREQUENCY CRITERION OF SOLUBILITY AND YAKUBOVICH ALGORITHM OF SOLUTION

CHEN Yangzhou
(*Dept. of Automation, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022)
LIU Jiaqi
(*School of Astronautics, Harbin Inst. of Tech., Harbin* 150001)
CHEN Shanben
(*National Key Laboratory of Advanced Welding Production, Harbin Inst. of Tech., Harbin* 150001)

Key words　H^∞ algebraic Riccati equation, positive semi-definite stabilizing solution, frequency criterion, Yakubovich algorithm.

1　引言

众所周知，在 H^∞ 控制问题的状态空间解法中关键的步骤是判断代数 Riccati 方程

$$-C^TC - A^TY - YA + Y(BB^T - \gamma^{-2}GG^T)Y = 0 \tag{1}$$

半正定镇定解的存在性并求出该解[1,2]. 上式中 A,B,G,C 为给定的适当维数的实矩阵；γ 为一预先未知的正实数，它代表着干扰抑制水平；上标 "T" 表示矩阵或向量的转置. 目前，虽然有许多方法（如牛顿迭代法、哈米顿矩阵的不变子空间法、广义特征子空间法、矩阵符号函数法等）可用来求解代数 Riccati 方程，但由于方程(1)中参数 γ 事先未知，使得应用

1) 国家教委留学回国人员专项基金和国家自然科学基金资助项目.
收稿日期　1997-05-13　收修改稿日期　1998-08-20

这些方法时需要反复试探参数 γ 以判断解的存在性. 本文中我们在(C,A)能观测这样一个稍强的假定下给出式(1)的半正定镇定解存在的一个易检验的频率判据，并给出一个直观的几何解释. 同时将原方程转化为可利用 Yakubovich 算法[3]来求解.

2 频率判据和 Yakubovich 算法

在(A,B,C)能稳能观(即(A,B)能稳(C,A)能观)假定下，方程(1)存在半正定镇定解 Y(即使得 $A-BB^{\mathrm T}Y+\gamma^{-2}GG^{\mathrm T}Y$ 为 Hurwitz 矩阵的半正定解)当且仅当方程[2]

$$\gamma^{-2}GG^{\mathrm T}-BB^{\mathrm T}+AX+XA^{\mathrm T}+XC^{\mathrm T}CX=0 \tag{2}$$

存在正定解 X(此解事实上也是式(2)的镇定解)，并且有 $Y=X^{-1}$.

引入如下记号：算子∇ 意指对一多项式矩阵 $M(\lambda)$，$M^{\nabla}(\lambda)=M^{*}(-\lambda)$，符号 $*$ 表示共轭转置，i 表示虚数单位，

$$A_\lambda=\lambda I-A,\ W_1(\lambda)=CA_\lambda^{-1}G,\ W_2(\lambda)=CA_\lambda^{-1}B,\ \delta(\lambda)=\det A_\lambda \tag{3a}$$

$$\overline{A}_\lambda=\delta(\lambda)A_\lambda^{-1},\ \Phi(\lambda)=C\overline{A}_\lambda(BB^{\mathrm T}-\gamma^{-2}GG^{\mathrm T})\overline{A}_\lambda^{\nabla}C^{\mathrm T}+\delta(\lambda)\delta^{\nabla}(\lambda)I. \tag{3b}$$

定理1. 假定在方程(1)中(A,B,C)能稳能观，且 A 无对称于虚轴的特征根，则方程(1)存在半正定镇定解的充分必要条件是：a)对任意的实 ω，有

$$W_2(i\omega)W_2^{*}(i\omega)-\gamma^{-2}W_1(i\omega)W_1^{*}(i\omega)+I>0 \tag{4}$$

(从而方程(2)有镇定解 X)；b)方程(2)的镇定解为正定的.

证明. 显然只需要说明条件 a)的充分必要性. 方程(2)可以写成 Lur'e 型方程

$$\gamma^{-2}GG^{\mathrm T}-BB^{\mathrm T}+AX+XA^{\mathrm T}+HH^{\mathrm T}=0,\ H=-XC^{\mathrm T}, \tag{5}$$

或等价地写成恒等式(对任意适当维数的复向量 $\boldsymbol z,\boldsymbol w$)

$$2\mathrm{Re}\,\boldsymbol z^{*}X(-A^{\mathrm T}\boldsymbol z+C^{\mathrm T}\boldsymbol w)+\boldsymbol z^{*}(BB^{\mathrm T}-\gamma^{-2}GG^{\mathrm T})\boldsymbol z+\boldsymbol w^{*}\boldsymbol w=$$
$$(\boldsymbol w-H^{\mathrm T}\boldsymbol z)^{*}(\boldsymbol w-H^{\mathrm T}\boldsymbol z). \tag{6}$$

不失一般性，假定 A 无对称于虚轴的特征根. 事实上，由于(C,A)能观，则存在矩阵 K 使得$-A^{\mathrm T}+C^{\mathrm T}K^{\mathrm T}$ 无对称于虚轴的特征根. 从而代替方程(5)可以考查方程

$$\gamma^{-2}GG^{\mathrm T}-BB^{\mathrm T}-KK^{\mathrm T}+(A-KC)X+X(A-KC)^{\mathrm T}+H_1H_1^{\mathrm T}=0,$$
$$H_1=-XC^{\mathrm T}-K.$$

现假定恒等式(6)成立，则当 $\boldsymbol z,\boldsymbol w$ 满足$-A^{\mathrm T}\boldsymbol z+C^{\mathrm T}\boldsymbol w=i\omega\boldsymbol z$ 时，可得

$$C(i\omega I-A)^{-1}(BB^{\mathrm T}-\gamma^{-2}GG^{\mathrm T})(-i\omega I-A^{\mathrm T})^{-1}C^{\mathrm T}+I>0. \tag{7}$$

事实上，条件(7)不仅是恒等式(6)对某个 X,H 成立的必要条件而且是充分条件，这是 Kalman-Yakubovich 引理给出的结论[6]. 证毕.

定理1给出了方程(1)可解的一个频率判据. 这个判据有一个简单的几何解释. 以下假定在式(1)矩阵 C 为行向量 $\boldsymbol c$(即考虑单输出情况)且$(A,B,\boldsymbol c)$能稳能观.

直线判据. 令 $L(i\omega)=(W_1(i\omega)W_1^{*}(i\omega),W_2(i\omega)W_2^{*}(i\omega))$，则方程(1)有半正定镇定解当且仅当 $L(i\omega)$当 ω 从0变到$+\infty$时在(x,y)平面坐标系中的图像位于直线 $\gamma^{-2}x-y=1$的左边(从而方程(2)有镇定解)，且方程(2)的镇定解正定.

方程(1)的正定镇定解可应用 Yakubovich 算法求得[3]：

1) 计算式(3)中的 $\Phi(\lambda)$并分解 $\Phi(\lambda)=\varphi(\lambda)\varphi^{\nabla}(\lambda)$，使 $\varphi(\lambda)$为首项系数为1的 Hurwitz

反稳定多项式；

2）计算多项式 $\varphi(\lambda)-\delta(\lambda)$ 和多项式矩阵 $\boldsymbol{c}\overline{A}_\lambda$ 的系数

$$\varphi(\lambda)-\delta(\lambda)=k_1\lambda^{n-1}+\cdots+k_{n-1}\lambda+k_n,$$

$$\boldsymbol{c}\overline{A}_\lambda=\boldsymbol{q}_1\lambda^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{q}_{n-1}\lambda+\boldsymbol{q}_n,$$

其中 n 为矩阵 A 的阶次；

3）由方程 $\boldsymbol{q}_jH=\boldsymbol{k}_j(j=1,\cdots n)$ 求解矩阵 H；

4）当 A 无对称于虚轴的特征根时，由 Lyapunov 方程

$$AX+XA^{\mathrm{T}}+(HH^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}GG^{\mathrm{T}}-BB^{\mathrm{T}})=0$$

求出 X；否则，选择一个矩阵 K 使得 $A_K=:A-KC$ 无对称于虚轴的特征根，然后由

$$A_KX+XA_K^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}GG^{\mathrm{T}}-BB^{\mathrm{T}}-KK^{\mathrm{T}}+(K-H)(K-H)^{\mathrm{T}}=0$$

求出 X；

5）如果 X 正定，则求 $Y=X^{-1}$.

3 结束语

本文给出了 H^∞ 代数 Riccati 方程存在正定镇定解的一个频率判据. 对于单输出情况给出了一个几何解释. 这种几何判别方法可以很方便地应用 Matlab 软件包实现. 另外，还将 Yakubovich 仅对标准代数 Riccati 方程给出的算法用来计算 H^∞ 代数 Riccati 方程正定镇定解. 需指出的是，定理1中条件 b）可用另一些等价条件代替，本文限于篇幅不予讨论.

参 考 文 献

1 Doyle J, Glover K, Khargonekar P, Francis B. State-space solutions to standard H_∞ and H_2 control problems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 1989, **34**(8): 831～847

2 Scherer C. H_∞ -control by state feedback: an iterative algorithm and characterization of high-gain occurrence. *Sys. and Control Lett.*, 1989(12): 383～391

3 Yakubovich V A. Frequency theorem in control theory (in Russian). *Siberian Math. Zh.*, 1973, **16**(2): 385～420

陈阳舟 1963年生，1994年在俄罗斯圣彼得堡大学获理学博士学位. 1996年3月至1998年3月在哈尔滨工业大学从事博士后研究工作. 现为北京工业大学自动化系副教授. 目前主要的研究领域有鲁棒控制、最优控制和微分对策等.

陈善本 1956年生，工学博士，现任哈尔滨工业大学教授、博士生导师. 目前研究领域有鲁棒控制、最优控制、机器人焊接智能化相关的理论与应用等.

刘家琦 1941年生，现为哈尔滨工业大学教授、博士生导师、副校长. 主要从事计算数学、应用数学和应用地球物理等领域有关反问题的研究.